

LM256 : Analyse vectorielle, intégrales multiples

Fabrice Bethuel

Année Universitaire 2012-2013

Table des matières

1 Fonctions d'une variable réelle	3
1.1 Généralités sur les applications et les fonctions	3
1.1.1 Premières définitions	3
1.1.2 Composition des applications	4
1.1.3 Application réciproque	5
1.2 La notion de limite	6
1.3 La notion de continuité	7
1.4 La notion de dérivée	8
1.4.1 Définition	8
1.4.2 Calculs de dérivées	10
1.4.3 Dérivées d'ordre supérieur	11
1.5 Primitives	12
1.5.1 Opérations sur les primitives	13
1.5.2 Intégrales définies	14
1.5.3 Aire d'un domaine du plan	15
1.5.4 intégration de la relation «<»	16
1.6 Développements limités	17
2 Fonctions de deux variables	19
2.1 L'espace vectoriel \mathbb{R}^2	19
2.2 Courbes paramétrées de \mathbb{R}^2	21
2.3 Graphes, lignes de niveau	24
2.4 Limites, continuité	26
2.5 La notion de dérivée partielle	28
2.5.1 Développement limité à l'ordre 1	30
2.5.2 Le gradient	31
2.5.3 Dérivation des fonctions composées	32
2.5.4 La matrice Jacobienne	34
2.5.5 Dérivées secondes	36
2.6 Le théorème des fonctions implicites	39
3 Champs de vecteurs	44
3.1 Premières définitions	44
3.1.1 Changement de repère	45
3.1.2 Champ de gradient	46
3.1.3 Lignes de champ	50
3.2 Circulation d'un champ de vecteurs	52

3.2.1	Circulation d'un champ de gradient	53
3.3	Le formalisme des formes différentielles	55
3.3.1	Formes linéaires	55
3.3.2	Forme différentielles de degré 1	56
3.3.3	Intégrale curviligne	56
4	Intégrales doubles	59
4.1	Construction de l'intégrale double	59
4.2	Le Théorème de Fubini	60
4.3	Intégration par parties	63
4.3.1	Calcul de l'aire d'un domaine	67
4.3.2	Flux et divergence	68
4.3.3	Autres formules	69
4.3.4	La divergence en coordonnées polaires	71
4.4	Changements de variables	72
4.4.1	Aire d'un paralléléogramme	72
4.4.2	Aire de l'image d'un rectangle élémentaire	73
4.4.3	La formule du changement de variable	73
4.4.4	Invariances par changement de repère orthonormé.	75
4.5	Calcul du volume d'un domaine de \mathbb{R}^3	77
4.6	Interprétation de la divergence et du flux	78
5	Analyse vectorielle dans \mathbb{R}^3	82
5.1	Introduction	82
5.1.1	Rappels sur \mathbb{R}^3	82
5.2	Limites, continuités et dérivation dans \mathbb{R}^3	84
5.3	Courbes paramétrées dans \mathbb{R}^3	86
5.4	Surfaces paramétrées dans \mathbb{R}^3	86
5.5	Le théorème des fonctions implicites	89
5.5.1	Aire d'une surface	91
5.5.2	Intégration sur les surfaces	92
5.6	Intégrales triples	93
5.6.1	Construction	93
5.6.2	Le Théorème de Fubini	93
5.6.3	Changements de variables	96
5.7	Formule flux-divergence	100
6	Le rotationnel	104
6.1	Champ de vecteurs, champs de gradient	104
6.1.1	Invariance du rotationnel par changement de repère orthonormé	106
6.2	Flux du rotationnel	106
6.2.1	Surfaces fermées	106
6.2.2	Surfaces dont le bord est une courbe	107
6.3	Champs à rotationnel nul	109
6.4	Champ à divergence nulle, potentiels vecteurs	110
7	Sujets d'examen	113

Chapitre 1

Fonctions d'une variable réelle

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques éléments de l'analyse des fonctions d'une variable réelle.

1.1 Généralités sur les applications et les fonctions

1.1.1 Premières définitions

Une *application* d'un ensemble E (dit "ensemble de départ") dans un ensemble F (dit "ensemble d'arrivée") est une correspondance qui associe à tout élément de E un élément de F et un seul. On note cette application :

$$f : E \rightarrow F \text{ ou encore } f : x \mapsto y = f(x).$$

L'élément $y = f(x)$ de F est appelé l'image de x par f . On dit aussi que x est l'antécédent de y .

Le *graphe* de f est la partie G du produit $E \times F$ constituée des éléments de la forme $(x, f(x))$, où $x \in E$.

Une *fonction* de E dans F est une application d'une partie D de E dans F . La partie $D \subset E$ est alors appelée domaine de définition de la fonction f , et est souvent notée \mathcal{D}_f :

$$D = \mathcal{D}_f.$$

Comme précédemment le graphe de f est donnée par les éléments de la forme $(x, f(x))$, où $x \in \mathcal{D}_f$.

Dans ce chapitre, nous considérerons *uniquement* le cas où $E = F = \mathbb{R}$. On parle alors de fonctions réelle d'une variable réelle. En revanche, dans les chapitres suivants, nous considérons plus généralement les cas où $E = \mathbb{R}^N$, $F = \mathbb{R}^K$, avec $N \in \{1, 2, 3\}$, $K \in \{1, 2, 3\}$.

Pour les fonctions d'une variable réelle, la fonction f est souvent définie à l'aide d'une formule. L'ensemble de définition est donc représenté par les éléments x pour lesquels cette formule à un sens.

Exemple 1.

- La fonction $x \rightarrow ax$, où a est donné, est une fonction linéaire. Son domaine de définition est \mathbb{R} tout entier. Son graphe est une droite du plan \mathbb{R}^2 passant par l'origine.

- la fonction $x \rightarrow ax + b$ où les nombres a et b sont donnés est une fonction affine. Son domaine de définition est \mathbb{R} tout entier. Son graphe est une droite du plan \mathbb{R}^2 passant par le point $(0, b)$.
- la fonction $x \rightarrow ax^2 + bx + c$, où $a \neq 0, b, c$ sont donnés définit une fonction, polynôme de degré 2. son domaine de définition est \mathbb{R} tout entier. Son graphe est une courbe, appelée *parabole*, qui passe par le point $(0, c)$.
- La fonction f définie par la formule $f(x) = \frac{1}{x}$ est définie pour tout x non nul de \mathbb{R} , son domaine de définition est donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- La fonction f définie par la formule $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ est définie pour tout x de l'intervalle $[-1, 1]$. Son domaine de définition \mathcal{D}_f est donc l'intervalle $[-1, 1]$.

Revenons au cas général, et considérons une *application* $f : E \rightarrow F$, où E et F sont deux ensembles. On dira que :

- L'application f est *injective* si chaque élément y de F a au plus un antécédent par f . En d'autres termes, f est injective si et seulement si pour tous éléments x et x' de E l'égalité $f(x) = f(x')$ entraîne nécessairement $x = x'$.
- L'application f est *surjective* si chaque élément y de F a au moins un antécédent par f . En d'autres termes, f est surjective si et seulement si pour tous éléments y' de F il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
- L'application f est *bijective* si et seulement si chaque élément y de F a exactement un antécédent et un seul par f . En d'autres termes, f est bijective si et seulement si pour tout élément y de F il existe un *unique élément* $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

On vérifiera sans mal qu'une application est *bijective* si et seulement si elle est *injective* et *surjective*.

Par exemple, l'application $x \rightarrow \sin x$ est surjective si on la considère comme application de \mathbb{R} dans $[-1, +1]$. Elle n'est pas injective puisque, par exemple, $\sin 0 = \sin 2\pi$. En revanche, elle devient bijective si on la considère comme application de $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ sur $[1, +1]$.

1.1.2 Composition des applications

Considérons maintenant trois ensembles E, F, G et des applications $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$. Pour tout élément x dans E , on peut alors définir l'élément $z = g(f(x))$ de G . Ceci définit une nouvelle application de E dans G , notée $g \circ f$.

Définition 1. On appelle *application composée de f et de g* et on note $g \circ f$ l'*application de E vers G définie par*

$$g \circ f(x) = g(f(x)), \text{ pour tout } x \in E.$$

De même, on peut définir l'*application composée de deux fonctions* $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$. La fonction composée $g \circ f$ est alors une fonction de E vers G dont le domaine de définition est composée des éléments de \mathcal{D}_f dont l'image par f appartient au domaine de définition de g .

Exemple 2. Prenons les fonctions d'une variable réelle f et g définies par

$$g(x) = \frac{1}{x} \text{ et } f(x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

La fonction $g \circ f$ est alors donnée par

$$g \circ f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Le domaine de définition de $g \circ f$ est donc $] -1, 1 [$. Les points ± 1 appartiennent bien au domaine de définition de f , mais leur image par f vaut 0, qui n'est pas dans le domaine de définition de g .

1.1.3 Application réciproque

Soient E et F deux ensembles et f une application de E vers F que l'on supposera de plus *bijjective*, c'est à dire que pour tout élément y de F il existe un unique élément x de E tel que $y = f(x)$.

Définition 2. On appelle application réciproque de f et on note f^{-1} l'application de F vers E qui à tout élément y de F associe l'unique élément x de E tel que $y = f(x)$.

En d'autres termes

$$x = f^{-1}(y) \text{ si et seulement si } y = f(x).$$

Il résulte de la définition que

$$f^{-1} \circ f = \text{Id}_E \text{ et } f \circ f^{-1} = \text{Id}_F,$$

où Id_E désigne l'*application identité* de E , c'est à dire l'application de E dans lui-même définie par $\text{Id}_E(x) = x$, avec bien entendu une définition similaire pour Id_F .

On peut vérifier la propriété suivante, dont la preuve est laissée en exercice

Proposition 1. Soient E, F, G trois ensembles et des applications $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ supposées bijectives. Alors l'application composée $g \circ f$ est bijective de E vers G et l'application réciproque vérifie l'identité

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Exemple 3.

- La fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = x^2$, est une application bijective (elle ne le serait pas si l'on prenait \mathbb{R} comme ensemble de départ). Son application réciproque est donnée par $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, qui n'est autre que la fonction racine carrée !
- La fonction $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ est une application bijective. On note \arcsin l'application réciproque $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. On a donc pour $x \in [-1, 1]$, $y = \arcsin x$ si et seulement si

$$y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \text{ et } x = \sin y.$$

- De même, la fonction $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ est une application bijective. On note \arccos l'application réciproque $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$. On a donc pour $x \in [-1, 1]$, $y = \arccos x$ si et seulement si

$$y \in [0, \pi] \text{ et } x = \cos y.$$

- La fonction $\tan : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ est une application bijective. On note \arctan l'application réciproque $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. On a donc pour $x \in \mathbb{R}$, $y = \arctan x$ si et seulement si

$$y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \text{ et } x = \tan y.$$

Notons par ailleurs que si f est une fonction d'une variable réelle bijective, le graphe de f^{-1} se déduit de celui de f en faisant agir une symétrie par rapport à la droite $y = x$, qui intervertit en particulier les axes.

1.2 La notion de limite

Nous ne considérons dorénavant, et jusqu'à la fin de ce chapitre que des fonctions d'une variable réelle, c'est à dire le cas $E = F = \mathbb{R}$.

Soit donc f et x_0 un point donné de \mathcal{D}_f . On supposera de plus que f est définie sur un intervalle ouvert non vide $]a, b[$ contenant x_0 , **sauf peut-être** en x_0 , c'est à dire que $]a, b[\setminus\{x_0\} \subset \mathcal{D}_f$.

Définition 3. On dit que la fonction f admet une limite L en x_0 , ou que $f(x)$ tend vers L lorsque x tend vers x_0 , si et seulement si :

Pour tout nombre réel $\epsilon > 0$, il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que la relation $0 < |x - x_0| < \alpha$ entraîne

$$|f(x) - L| < \epsilon.$$

On vérifie que si une limite L existe, alors elle est forcément unique. On note alors

$$L = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ ou encore } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} L.$$

Ceci signifie que pour un nombre $\epsilon > 0$ aussi petit que l'on le désire, on peut trouver un nombre $\alpha > 0$ qui dépend bien entendu de ϵ tel que si l'écart entre x_0 et x (x étant distinct de x_0) est inférieur à α , alors l'écart entre $f(x)$ et L est inférieur à ϵ .

Voyons maintenant comment la notion de limite se comporte vis à vis des opérations classiques sur les fonctions (addition, multiplication et division). Rappelons que si f et g sont des fonctions réelles, on définit les fonctions $f \pm g$, fg , et $\frac{g}{f}$ par

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x), \text{ et } (fg)(x) = f(x)g(x), \forall x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g,$$

$$\frac{g}{f}(x) = \frac{g(x)}{f(x)} \text{ pour } x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \text{ tel que } f(x) \neq 0.$$

Proposition 2. Soient f et g deux fonctions sur \mathbb{R} telles que f et g admettent comme limites en x_0 les nombres L et M respectivement. Les fonctions $f \pm g$ et fg admettent alors les limites suivantes en x_0 :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f \pm g)(x) = L \pm M \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0} (fg)(x) = LM.$$

de plus, si $L \neq 0$ alors on a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g}(x) = \frac{L}{M}.$$

Démonstration (première partie). On commence par se donner $\epsilon > 0$. Comme $f(x)$ tend vers L quand x tend vers x_0 , il existe un nombre $\alpha_1 > 0$ tel que, si $0 < |x - x_0| < \alpha_1$ alors on a $|f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2}$. De la même manière, il existe un nombre $\alpha_2 > 0$ tel que si $0 < |x - x_0| < \alpha_2$, alors on a $|g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2}$. Posons $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$. On a $\alpha > 0$ et si $0 < |x - x_0| < \alpha$, alors la définition de α entraîne que l'on a $0 < |x - x_0| < \alpha_1$ et $0 < |x - x_0| < \alpha_2$ et donc

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x) - L - M| &\leq |f(x) - L| + |g(x) - M| \text{ (inégalité triangulaire)} \\ &= \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon. \end{aligned}$$

Ceci montre donc que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = L + M.$$

Les autres relations se démontrent en utilisant des méthodes similaires. □

Rappel. On a utilisé dans la preuve l'inégalité triangulaire

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Elle entraîne l'inégalité

$$|a \pm b| \leq |a| - |b|.$$

Exemple 4. Des arguments géométriques élémentaires permettent d'établir que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (1.1)$$

On montre également que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1. \quad (1.2)$$

1.3 La notion de continuité

La notion de continuité découle directement de celle de limite.

Définition 4. On suppose que f est aussi définie en x_0 . On dit que f est continue en x_0 si et seulement si f admet une limite en x_0 , égale à sa valeur $f(x_0)$ en ce point.

On dit que f est continue sur un intervalle $]a, b[$ si elle est continue en tout point x_0 de $]a, b[$.

De manière intuitive, une fonction f est continue sur un intervalle $]a, b[$ si on peut tracer le graphe de la restriction à cet intervalle sans lever la main.

Il résulte immédiatement de la Proposition 2 que si f et g sont deux fonctions continues en un point x_0 , alors $f + g$, $f - g$ et fg sont également continues en ce point. Si $g(x_0) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est également continue en x_0 .

Exemple 5.

- Les fonctions constantes sont continues.
- La fonction $\text{Id}_{\mathbb{R}}$ est continue (prendre $\epsilon = \alpha$ dans la Définition 6).
- Les polynômes sont des fonctions continues (car obtenues à l'aide d'opérations de multiplication et additions à partir de fonctions constantes et de la fonction $\text{Id}_{\mathbb{R}}$)
- Les fractions rationnelles (quotient de deux polynômes) sont continues sur leur ensemble de définition, qui est composé d'intervalles ouverts.
- Les fonctions trigonométriques \sin , \cos sont continues sur \mathbb{R} , ainsi que les fonctions e^x et \log sur leur ensemble de définition.

La notion de continuité a également de bonne propriétés vis à vis de la loi de composition.

Proposition 3. Soit f une fonction continue en x_0 et soit g une fonction continue en $f(x_0)$. Alors $g \circ f$ est continue en x_0 .

Démonstration Soit ϵ donné. Comme g est continue en $f(x_0)$, il existe un nombre $\eta > 0$ tel que si $|y - f(x_0)| < \eta$ alors on a $|g(y) - g(f(x_0))| = |g(y) - g \circ f(x_0)| < \epsilon$. Comme f est continue en x_0 , il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que si $|x - x_0| < \alpha$, alors $|f(x) - f(x_0)| < \eta$. Il en résulte que si $|x - x_0| < \alpha$, alors $|g(f(x)) - g \circ f(x_0)| < \epsilon$. La conclusion en découle. \square

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I =]a, b[$ de \mathbb{R} . Rappelons que l'on dit que f est *strictement croissante* (resp. *strictement décroissante* sur I) si et seulement, si pour tous nombres $a < x_1 < x_2 < b$, on a

$$f(x_1) < f(x_2) \text{ (resp. } f(x_1) > f(x_2)).$$

On dit que f est strictement monotone sur I si elle est strictement croissante ou strictement décroissante sur I . Lorsque f est strictement monotone sur I , il est facile de se convaincre qu'elle constitue une bijection de I sur son image

$$f(I) = \{y \in \mathbb{R} \text{ tel qu'il existe } x \in I \text{ } y = f(x)\}.$$

Lorsque f est de surcroît continue, alors on a

Proposition 4. Soit $I =]a, b[$ un intervalle ouvert, et soit f une fonction continue sur I . Alors $f(I)$ est un intervalle de \mathbb{R} . De plus, si f est strictement monotone, alors $f(I)$ est un intervalle ouvert, de la forme $]f(a), f(b)[$ si f est strictement croissante (resp. $]f(b), f(a)[$ si f est strictement décroissante), et de plus f est bijective de I sur $f(I)$. Son application réciproque est continue.

Nous admettrons ce résultat.

1.4 La notion de dérivée

1.4.1 Définition

Définition 5. Soit f une fonction. On dit que f possède une dérivée au point x_0 si la limite suivante

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existe et est finie. On note alors $f'(x_0)$ cette limite. On dit aussi que f est dérivable au point x_0 .

Remarque 1. On utilise aussi parfois la notation

$$f' = \frac{df}{dx}.$$

Lorsque la fonction est dérivable, le graphe possède au point $(x_0, f(x_0))$ une droite tangente qui est de pente $f'(x_0)$ exactement. Plus précisément, la droite affine d'équation

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

qui passe par le point $(x_0, f(x_0))$ est tangente à la courbe en ce point.

On déduit de la définition même de la dérivée, que l'on a le comportement suivant de la fonction f près de x_0

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + h\epsilon(h), \quad (1.3)$$

où ε désigne une fonction définie près de 0 et telle que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0,$$

Nous avons ici introduit la variable $h = x - x_0$ qui tend vers 0 lorsque x tends vers x_0 .

La relation (1.3) nous fournit un premier exemple de développement limité. Dans ce contexte, il est utile de rappeler la définition suivante.

Définition 6. Soient f et g deux fonctions définies près de x_0 . On dit que f est négligeable devant g si et seulement si il existe une fonction ε définie près de 0 telle que

$$f(x) = g(x)\varepsilon(x - x_0) \text{ et } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Si f est négligeable devant g , on écrit alors

$$f \underset{x_0}{=} o(g).$$

Si g ne s'annule pas près de x_0 sauf éventuellement en x_0 , alors f est négligeable devant g si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Notons que la relation "être négligeable" est une relation d'ordre (qui n'est pas totale), en particulier elle est transitive, c'est à dire si, $f \underset{x_0}{=} o(g)$ et $h \underset{x_0}{=} o(f)$ alors $h \underset{x_0}{=} o(g)$. C'est pourquoi on utilise également, à la place de la notation $f \underset{x_0}{=} o(g)$ la notation

$$f \ll_{x_0} g \text{ ou de manière équivalente } g \gg_{x_0} f.$$

La notion de fonction négligeable permet en particulier de comparer des *infinitiment petits* près de x_0 , et éventuellement des échelles d'*infinitiments petits*.

Exemple 6. si l'on prend g égale à la fonction constante 1 alors $f \underset{0}{=} o(1)$ signifie tout simplement que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0,$$

et de manière plus générale f tend vers L lorsque x tend vers x_0 peut s'écrire

$$f(x) \underset{x_0}{=} L + o(1) \text{ ou de manière équivalente } f(x_0 + h) \underset{0}{=} L + o(1). \quad (1.4)$$

On remarquera également que si m et n sont des nombres entiers tels que $0 \leq m < n$ alors

$$x^n \ll_{0} x^m,$$

ce qui nous fournit une échelle d'*infinitiment petits très utilisée* pour comparer des fonctions

$$1 \gg_{0} x \gg_{0} x^2 \gg_{0} x^3 \gg_{0} x^4 \dots$$

Revenons maintenant au développement (1.3) : ce dernier peut donc s'écrire, en utilisant les notations précédentes comme

$$f(x_0 + h) \underset{0}{=} f(x_0) + f'(x_0)h + o(h). \quad (1.5)$$

La notion de dérivée permet donc d'effectuer un développement limité à l'ordre 1, alors que la notion de limite fournit un développement limité à l'ordre 0. Notons au passage que la comparaison de (1.5) et de (1.4) permet immédiatement de démontrer :

Proposition 5. Si f est dérivable en x_0 , alors f est continue en x_0 .

La réciproque n'est pas vraie en général.

Rappelons également, pour finir avec les généralités sur la dérivation :

Proposition 6. Soit I un intervalle, f une fonction définie et dérivable sur I , de dérivée continue telle que

$$f'(x) > 0 \text{ sur } I.$$

Alors f est strictement croissante sur I .

1.4.2 Calculs de dérivées

Proposition 7. Soient f et g deux fonctions dérivables en x_0 . Alors les fonctions $f+g$, $f-g$, fg sont dérivables en x_0 , ainsi que la fonction $\frac{f}{g}$, si $g(x_0) \neq 0$, les dérivées étant données par les formules :

$$\begin{aligned} (f \pm g)'(x_0) &= f'(x_0) \pm g'(x_0) \\ (fg)'(x_0) &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \\ \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2} \text{ si } g(x_0) \neq 0. \end{aligned}$$

Si f est dérivable en x_0 et g dérivable en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Enfin si f possède une application réciproque et si $f'(x_0) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $f(x_0)$ et on a

$$(f^{-1})^{-1}(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Ces formules permettent de calculer de nombreuses dérivées : donnant quelques exemples.

Exemple 7. En utilisant directement la définition, on voit que la dérivée de la fonction $f(x) = x$ est $f'(x) = 1$ pour tout x . On utilisant la formule du produit, on en déduit que la dérivée de la fonction $x \mapsto x^2$ est

$$(x^2)' = 2x,$$

et de manière plus générale que la dérivée de la fonction $x \mapsto x^n$ vaut pour tout n entier positif

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

En utilisant la formule pour les fractions, on s'aperçoit que cette formule reste valable pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

On peut utiliser la formule de la fonction réciproque pour calculer la dérivée de la fonction racine carré, réciproque de $f(x) = x^2$. On trouve immédiatement

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

En fait, on peut montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a la formule générale $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

Pour les fonctions trigonométriques, on peut calculer directement la dérivées de la fonction \sin en utilisant la définition par quotient différentiel, et des formules de trigonométrie habituelles. On écrit, en utilisant le fait que $(\cos h)^2 + (\sin h)^2 = 1$

$$\begin{aligned}\sin(x+h) - \sin x &= \sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x \\ &= (\cos h - 1) \sin x + \cos x \sin h = \frac{-(\sin h)^2}{1 + \cos h} + \cos x \sin h\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{-(\sin h)^2}{(1 + \cos h)(h)} + \cos x \frac{\sin h}{h}$$

et ainsi, en utilisant (1.1)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x.$$

On a donc montré que

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Par une méthode similaire on obtient

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

En utilisant le fait que $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ et la formule pour la dérivée du quotient de deux fonctions on obtient

$$(\tan x)' = \frac{1}{(\cos x)^2} = 1 + \tan^2 x.$$

Calculons maintenant la dérivée de la fonction \arcsin en utilisant la formule pour la fonction réciproque. Posons $y = \arcsin x$ de sorte que $x = \sin y$. On a donc $(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos y}$. Comme $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$, on en déduit que

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Rappelons pour finir que

$$(e^x)' = e^x, \text{ et } (\log x)' = \frac{1}{x}.$$

1.4.3 Dérivées d'ordre supérieur

La dérivée définit elle même une fonction réelle, et lorsque l'ensemble de définition de cette dernière contient des intervalles ouverts, on peut étudier ses propriétés de différentiabilité. Lorsqu'elle existe, on note f'' la dérivée f' , et on l'appelle dérivée seconde. On définit ainsi itérativement la dérivée troisième notée f''' ou $f^{(3)}$, et de manière générale la dérivée d'ordre n notée $f^{(n)}$. Par convention, on posera $f^{(0)} = f$.

Un exemple remarquable est fourni par les polynômes, qui sont dérivables à tout ordre. Soit donc P un polynôme de degré n

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^n a_i x^i.$$

Un bref calcul montre que

$$P(0) = a_0, P'(0) = a_1, P''(0) = 2a_2$$

et de manière générale pour $i = 0 \dots n$

$$P^{(i)}(0) = i!a_i \quad (1.6)$$

alors que $P^{(i)}(x) = 0$ pour $i > n$ et tout x dans \mathbb{R} . On peut donc écrire

$$P(x) = \sum_{i=0}^n \frac{P^{(i)}(0)}{i!} x^i. \quad (1.7)$$

1.5 Primitives

L'opération de primitivation (ou d'intégration) est l'opération inverse de la dérivée.

Définition 7. Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a, b[$. On dit que F est une primitive de f sur l'intervalle $]a, b[$ si et seulement si

$$F'(x) = f(x), \text{ pour tout } x \in]a, b[, \quad (1.8)$$

Notons que pour $f = 0$, les fonctions constantes $F(x) = C$, pour tout x dans $]a, b[$, où C désigne un nombre quelconque sont évidemment solutions et réciproquement, on démontre que si

$$F'(x) = 0, \text{ pour tout } x \in]a, b[,$$

alors nécessairement il existe une constante $C \in R$ telle que $F = C$. Il en résulte que, si F est une primitive de f , alors il y a une infinité de primitives de f qui sont de la forme $F + C$. On désigne par le symbole

$$\int f(x) dx$$

cet ensemble de fonctions (on parle aussi d'intégrale indéfinie, car définie seulement à une constante près).

Exemple 8. De nombreuses primitives s'obtiennent par inversion des formules de dérivation. Voici quelques exemples :

- Comme $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ pour tout $\alpha \neq 0$, on en déduit par inversion, sur tout intervalle où la fonction est définie, que

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \text{ pour tout } \alpha \neq -1, \text{ où } C \text{ désigne une constante arbitraire.}$$

- Comme $(e^x)' = e^x$, on en déduit, que sur \mathbb{R} , on a

$$\int e^x dx = e^x + C.$$

- Comme $(\sin x)' = \cos x$ et $(\cos x)' = -\sin x$ on obtient, sur \mathbb{R}

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \text{ et } \int \cos x dx = \sin x + C.$$

1.5.1 Opérations sur les primitives

On vérifie tout d'abord que l'on a bien

$$\int (f \pm g)(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx,$$

et, pour tout $\lambda \neq 0$

$$\int \lambda f(x) dx = \lambda \int f(x) dx.$$

La formule de dérivation de la multiplication donne lieu à une opération plus compliquée, l'intégration par partie. On a

Proposition 8 (intégration par parties). *Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a, b]$. On a*

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx.$$

Démonstration. On part de la formule $(fg)' = fg' + gf'$ d'où il résulte que

$$f(x)g(x) + C = \int f(x)g'(x) dx + \int f(x)g'(x) dx.$$

(on peut ensuite absorber la constante C dans l'une des intégrales indéfinies).

Exemple 9. On utilise souvent la formule d'intégration par partie lorsque $f'g$ a une forme plus simple que fg' . Donnons un exemple de calcul de primitive par cette méthode. Cherchons les primitives de la fonction xe^x . Posons $f(x) = x$ et $g(x) = e^x$, de sorte que $g'(x) = e^x$. On a donc

$$\int xe^x dx = \int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

La loi de dérivation de la composée donne lieu, par inversion, à la formule dite de changement de variable. Soient f et g deux fonctions dérivables, telles que g soit définies sur l'image de f . Soit G une primitive de la fonction g . On a

$$(G \circ f)'(x) = G'(f(x))f'(x) = (g \circ f)(x)f'(x).$$

On a donc

Proposition 9 (changement de variable). *Pour f, g, G comme si dessus, on a*

$$G(f(x)) = \int (g \circ f)(x)f'(x) dx + C.$$

On a coutume d'écrire cette formule en introduisant la variable $u = f(x)$ puis $du = f'(x)dx$. La formule de changement de variable devient alors facile à retenir.

Exemple 10. Cherchons à calculer une primitive de $e^{x^2}x$. Posons $u = x^2$, d'où il résulte que $du = 2x$ et donc

$$\int e^{x^2} x dx = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^u + C = \frac{1}{2} e^{x^2} + C.$$

Nous avons jusqu'à présent manipulé les intégrales, mais nous n'avons pas donné de résultat général d'existence. Ce dernier est fourni par la théorie de l'intégrale définie, que nous présentons ci-dessous.

1.5.2 Intégrales définies

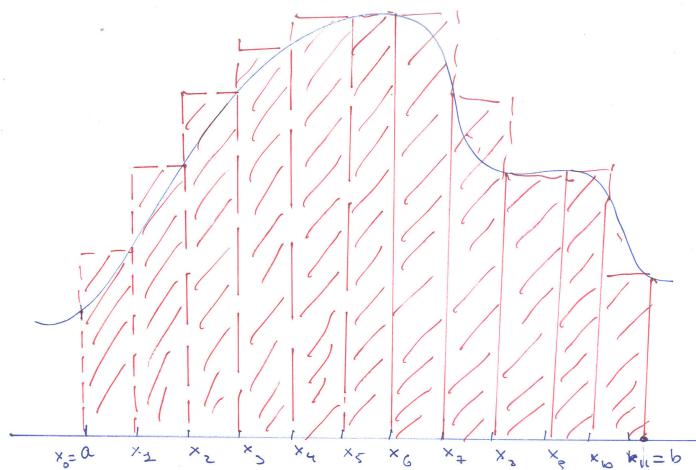
Considérons une fonction F continue sur un intervalle fermé $[a, b]$. Pour n donné dans \mathbb{N} on pose $h = \frac{b-a}{n}$, puis on partage l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles de tailles égales au moyen des points de subdivision

$$x_0 = a, x_1 = a + h, \dots, x_k = a + kh, \dots, x_n = b.$$

On définit ensuite les sommes

$$I_n = h [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)] = h \sum_{k=1}^n f(x_k) = \sum_{k=1}^n (x - x_k) f(x_k)$$

Remarquons que, si f est *positive*, alors $(x_k - x_{k-1}) f(x_k)$ représente l'aire du rectangle de base $[x_{k-1}, x_k]$ et de hauteur $f(x_k)$. En sommant sur tous les k on obtient donc un nombre qui est une approximation de l'aire limitée par la graphe de f , les droites verticales $x = a$, $x = b$, et l'axe Ox .



On peut démontrer que lorsque n tend vers $+\infty$, la suite $(I_n)_{n>0}$ converge, et que, si I désigne sa limite

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n,$$

alors cette limite correspond bien à l'aire limitée par le graphe de f , les droites verticales $x = a$, $x = b$, et l'axe Ox .

Définition 8. On appelle I l'intégrale de f sur $[a, b]$, et on la note

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

Convention. On convient que

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

Explicitons maintenant le lien entre intégrale et primitive. Posons pour $x_0 \in]a, b[$

$$F(x) = \int_a^x f(x) dx.$$

Pour $h > 0$ petit donné, $F(x+h) - F(x)$ représente l'aire limitée par la graphe de f , les droites verticales passant par x , $x+h$, et l'axe Ox , aire qui est proche de $f(x)h$. On a donc

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \simeq f(x)$$

et donc

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x),$$

F est donc une primitive de f : c'est la primitive de F qui s'annule en a . Réciproquement, si on connaît une primitive quelconque F de f on a

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

et donc les calculs d'intégrales se ramènent à trouver des primitives. Par exemple la formule d'intégration par parties s'écrit alors comme suit, pour les intégrales :

Proposition 10. *On a*

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx = [fg]_a^b - \int_a^b f(x) g'(x) dx$$

où on pose pour une fonction v quelconque

$$[v]_a^b = v(b) - v(a).$$

De même, la formule de changement de variable prend la forme suivante :

Proposition 11. *On a, si g est continue sur $f([a, b])$*

$$\int_{f(a)}^{f(b)} g(u) du = \int_a^b g(f(x)) f'(x) dx.$$

1.5.3 Aire d'un domaine du plan

Dans ce paragraphe, nous utilisons le calcul intégral pour calculer l'aire de domaines du plan.

Aire d'une arche de sinusoïde. Considérons le graphe de la fonction $y = \sin x$ pour x compris entre 0 et π . Cette fonction est positive sur $[0, \pi]$. Calculons l'aire de la surface limitée par le graphe de cette fonction et l'axe Ox . Cette aire a pour valeur

$$S = \int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]_0^\pi = (-\cos \pi) - (-\cos 0) = 2.$$

car comme nous l'avons vu, $-\cos x$ est une primitive de $\sin x$.

Aire d'une ellipse. Considérons la surface bordée par la courbe

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow y = \pm b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

où a et b sont strictement positifs. C'est une ellipse. La demie-ellipse supérieure est limitée par l'axe Ox et le graphe de la fonction positive

$$y = f(x) \equiv b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

qui est définie sur $[-a, a]$. La surface totale de l'ellipse est donc donnée par

$$S = 2 \int_{-a}^a f(x) dx.$$

On effectue le changement de variable

$$x = a \cos t, \quad t \in [0, \pi]$$

de sorte que $y = f(x) = b \sin t$. Si $t = \pi$, on a $x = -a$ et si $t = 0$ on a $x = a$. Donc

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_{\pi}^0 (b \sin t) d(a \cos t) = 2 \int_{\pi}^0 (b \sin t)(-a \sin t) dt \\ &= -2ab \int_{\pi}^0 \sin^2 t dt = 2ab \int_0^{\pi} \sin^2 t dt \\ &= ab \int_0^{\pi} (1 - \cos 2t) dt = ab \left[t - \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\pi} = \pi ab. \end{aligned}$$

où on a utilisé la relation $2 \sin^2 t = 1 - \cos 2t$.

1.5.4 intégration de la relation \ll

Contrairement à la dérivation, l'intégration à de bonnes propriétés vis à vis de la relation \ll . On a

Proposition 12. Soient f et g deux fonctions définies près de zéro. On suppose de plus que

$$f \underset{0}{\ll} g.$$

On a alors

$$\int_0^x f(s) ds \ll \int_0^x |g(s)| ds.$$

Démonstration. Par hypothèse $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$, où ε tend vers zéro lorsque x tend vers zéro on a donc

$$|\int_0^x f(s) ds| = |\int_0^x \varepsilon(s)g(s) ds| \leq \sup_{s \in [0, x]} |\varepsilon(s)| \int_0^x |g(s)| ds.$$

et la conclusion découle du fait que $\sup_{s \in [0, x]} |\varepsilon(s)|$ tend vers 0 lorsque x tend vers zéro. \square

Une conséquence intéressante de cette propriété est la suivante :

Proposition 13. Soit f une fonction définie près de zéro, ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre n , que l'on suppose continues près de zéro. On suppose de plus que

$$f^{(k)}(0) = 0 \quad \text{pour } k = 0, \dots, n.$$

Alors on a

$$f(x) \underset{0}{\ll} x^n.$$

Démonstration Le cas $n = 1$ a déjà été traité. Si $n = 2$, alors on a $f''(0) = 0$ et donc par le cas $n = 1$, on obtient

$$\underset{0}{\lim} f'(x) \ll x.$$

Comme $f(x) = \int_0^x f'(x) dx$, la proposition 12 nous donne

$$\underset{0}{\lim} f(x) \ll x^2.$$

ce qui est la conclusion désirée pour $k = 2$. Le cas général se traite de même.

1.6 Développements limités

Définition 9. Soit f une fonction définie au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 si l'on peut écrire

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon(x)$$

où ε est une fonction qui tend vers 0 lorsque x tend vers x_0 .

Le polynôme $\text{DL}_n(f, x_0)$ de degré inférieur ou égal à n défini par

$$\text{DL}_n(f, x_0) \equiv a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n$$

est appelé *partie régulière* du développement limité, et $(x - x_0)^n \varepsilon(x)$ le reste que l'on peut donc écrire $o(x - x_0)^n$.

Le développement limité, lorsqu'il existe, est **unique**. Notons que l'on a

$$\text{DL}_n(f \pm g, x_0) = \text{DL}_n(f, x_0) \pm \text{DL}_n(g, x_0)$$

et pour toute constante $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\text{DL}_n(\lambda f, x_0) = \lambda \text{DL}_n(f, x_0).$$

Pour calculer $\text{DL}_n(fg, x_0)$ on développe le produit $\text{DL}_n(f, x_0)\text{DL}_n(g, x_0)$ et on ne garde que les termes de degré inférieur à n . Le résultat suivant est fondamental.

Théorème 1 (développement de Taylor). Supposons que f ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre n soient définies, continues près de x_0 . Alors f possède un développement limité à l'ordre n près de x_0 donné par

$$f(x) = \underset{x_0}{\lim} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

Démonstration. Supposons pour simplifier que $x_0 = 0$ (sinon, on fait un changement de variable), et considérons le polynôme

$$P(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{\dots f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

On a vu que, pour tout $k = 0, \dots, n$, on a

$$P^{(k)}(0) = f^{(k)}(0) \text{ et donc } (f - P)^{(k)}(0) = 0.$$

la conclusion résulte alors de la Proposition 12.

□

Voici quelques exemples classiques de développements limités près de 0

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n) \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+1}) \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p}) \\ e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\ \log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + o(x^n).\end{aligned}$$

Chapitre 2

Fonctions de deux variables

On considère dans cette partie des fonctions de deux variables à valeurs dans \mathbb{R} ou éventuellement dans \mathbb{R}^2 c'est à dire des fonctions de $E = \mathbb{R}^2$ vers $F = \mathbb{R}$ ou $F = \mathbb{R}^2$. Avant d'aller plus loin, commençons par quelques rappels sur les propriétés de \mathbb{R}^2 ainsi que sur la notion de courbe paramétrée.

2.1 L'espace vectoriel \mathbb{R}^2

L'espace \mathbb{R}^2 est un espace vectoriel lorsqu'on le munit de la loi d'addition

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2), \forall X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \forall Y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2,$$

et de la loi de multiplication par un scalaire

$$\lambda.(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2), \forall X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R}.$$

On note $0 = (0, 0)$ l'élément neutre pour l'addition ci-dessus, c'est à dire tel que $0 + X = X + 0 = X$.

On munit par ailleurs \mathbb{R}^2 d'un produit scalaire noté " \cdot " défini par

$$(x_1, x_2).(y_1, y_2) = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2, \forall X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \forall Y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

On vérifie immédiatement que le produit scalaire a les propriétés suivantes :

Proposition 1. *On a pour tous vecteurs X, Y, Z de \mathbb{R}^2 et tout scalaire λ de \mathbb{R}*

$$\begin{aligned} X \cdot Y &= Y \cdot X \\ (X + Y) \cdot Z &= X \cdot Y + Y \cdot Z \\ X \cdot (Y + Z) &= X \cdot Y + X \cdot Z \\ (\lambda X) \cdot Y &= \lambda(X \cdot Y) \\ X \cdot X &\geq 0 \end{aligned}$$

avec égalité si et seulement si $X = 0$.

On définit la norme euclidienne $\|\cdot\|$ par

$$\|X\| = \sqrt{X \cdot X} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \geq 0, \forall X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

de sorte que $\|X\| = 0$ si et seulement si X est nul. L'inégalité triangulaire est une propriété très intéressante de la norme, à savoir

$$\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|. \quad (2.1)$$

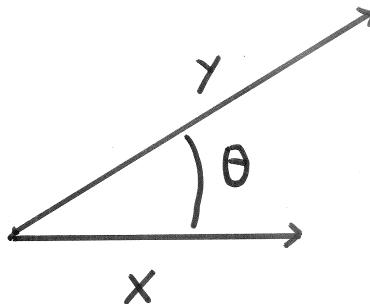
Si θ désigne l'angle entre les vecteurs X et Y , on a par ailleurs

$$X \cdot Y = \|X\| \cdot \|Y\| \cos \theta,$$

de sorte que

$$|X \cdot Y| \leq \|X\| \cdot \|Y\|, \quad (2.2)$$

avec égalité si et seulement si les vecteurs sont colinéaires. Cette dernière inégalité s'appelle l'inégalité de *Cauchy-Schwarz*.



La norme euclidienne permet de définir une distance, dite euclidienne également, entre les éléments de \mathbb{R}^2 :

$$\text{dist}(X, Y) = \|X - Y\|.$$

Notons que cette distance majore la différence des coordonnées

$$|x_1 - y_1| \leq \text{dist}(X, Y) = \|X - Y\|, \quad |x_2 - y_2| \leq \text{dist}(X, Y) = \|X - Y\|,$$

et que la somme de la différence des coordonnées majore la norme

$$\text{dist}(X, Y) = \|X - Y\| \leq |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|.$$

Remarque 1. Si $A = (a_1, a_2)$ et $B = (b_1, b_2)$ sont deux éléments de \mathbb{R}^2 alors on note souvent

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

La norme de \overrightarrow{AB} donnée par

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

représente donc la longueur du segment AB . Notons par ailleurs qu'avec ces notations, on a également $X = \overrightarrow{OX}$.

2.2 Courbes paramétrées de \mathbb{R}^2

Nous serons amenés dans de nombreuses circonstances à formaliser la notion de courbe dans le plan \mathbb{R}^2 . Nous verrons essentiellement deux méthodes pour réaliser un tel objectif : la méthode paramétrique et la méthode implicite. La méthode paramétrique que nous allons voir dans ce paragraphe, s'inspire de la notion de trajectoire. Elle permet de plus de définir une orientation naturelle à la courbe.

Définition 1. Soit I un intervalle de \mathbb{R} non vide. Soit M_1 et M_2 deux applications continues de I dans \mathbb{R} , et soit l'application $M : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $M(t) = (M_1(t), M_2(t))$, pour $t \in I$. Soit \mathcal{C} l'image de I par M , c'est à dire l'ensemble des points de \mathbb{R}^2 de la forme $(x_1, x_2) = (M_1(t), M_2(t))$ où $t \in I$ ou encore

$$\mathcal{C} = \{(t) = (M_1(t), M_2(t)), t \in I\}.$$

On dit que \mathcal{C} est une courbe paramétrée du plan.

Exemple 1. La courbe définie par les fonctions

$$M_1(t) = a_1 t + b_1, \quad M_2(t) = a_2 t + b_2 \text{ pour } t \in \mathbb{R}$$

définie une droite affine du plan. Si $a_1 = 0$ c'est la droite verticale $x = b_1$, si $a_2 = 0$ on obtient la droite horizontale $y = b_2$.

La courbe définie par $x_1 = \cos t$ et $x_2 = \sin t$ pour $t \in I = [0, 2\pi]$ est le cercle de centre 0 et de rayon 1.

La courbe définie par $x_1 = a \cos t$ et $x_2 = b \sin t$, où $a > b > 0$ sont des paramètres pour $t \in I = [0, 2\pi]$ est une ellipse de centre 0, dont le grand axe est horizontal, de longueur $2a$.

Le graphe de fonction de I dans \mathbb{R} fournit un autre exemple élémentaire de courbe paramétrée. Si f est une fonction de I dans \mathbb{R} son graphe est la courbe paramétrée par

$$\begin{cases} M_1(t) = t \\ M_2(t) = f(t), \quad t \in I. \end{cases}$$

Remarque 2. On peut paramétriser une même courbe \mathcal{C} de plusieurs manières différentes. Par exemple la droite $y = x$ peut être paramétrée par

$$x_1 = t \quad x_2 = t, \quad t \in \mathbb{R}$$

mais aussi par

$$x_1 = 2t \quad x_2 = 2t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

De manière plus générale, si J est un intervalle de \mathbb{R} et φ une application continue strictement monotone bijective de J vers I , la courbe \mathcal{C} peut être paramétrée comme

$$x_1 = (f_1 \circ \varphi)(s), \quad x_2 = (f_2 \circ \varphi)(s), \quad s \in J.$$

Supposons maintenant que les fonctions M_1 et M_2 sont dérivables.

Définition 2. Le point $M(t) = (M_1(t), M_2(t))$ de la courbe \mathcal{C} est dit *ordinaire* si

$$(M'_1(t), M'_2(t)) \neq (0, 0).$$

Il est dit stationnaire si $(M'_1(t), M'_2(t)) = (0, 0)$.

Définition 3. Soit $M(t_0) = (M_1(t_0), M_2(t_0))$ un point ordinaire. La droite passant par $M(t_0)$ et de vecteur directeur $(M'_1(t_0), M'_2(t_0))$, c'est à dire la droite paramétrée par

$$x_1(s) = M'_1(t_0)s + M_1(t_0) \text{ et } x_2(s) = M'_2(t_0)s + M_2(t_0), \quad s \in \mathbb{R}$$

est appelée *droite tangente* en $M(t_0)$ à la courbe \mathcal{C} .

Tout vecteur non nul colinéaire au vecteur $(M'_1(t_0), M'_2(t_0))$ est appelée *vecteur tangent* en $M(t_0)$. Il est souvent d'usage de représenter un tel vecteur en prenant un point P de la droite tangente à \mathcal{C} , choisi de sorte que le vecteur $\overrightarrow{M(t_0)P}$ d'origine $M(t_0)$ et d'extrémité P soit égal au vecteur tangent donné. Réciproquement, tout vecteur de cette forme est bien un vecteur tangent.

Exemple 2. Considérons le cercle unité \mathcal{S}^1 défini par

$$x_1(t) = \cos t, \quad x_2(t) = \sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

et le point $M_0 = M(\frac{\pi}{4})$, c'est à dire $M_0 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. La droite tangente à \mathcal{S}^1 en M_0 a pour vecteur directeur $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ et peut être paramétrée de la façon suivante

$$x_1 = -\frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x_2 = \frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Il s'agit aussi de la droite qui a pour équation

$$x_1 + x_2 = \sqrt{2}.$$

Considérons maintenant de manière plus générale une courbe donnée sous forme de graphe $x_2 = \varphi(x_1)$, où φ est une fonction d'une variable réelle dérivable. Un vecteur tangent à cette courbe au point $M = (m_1, m_2)$ est donné par

$$\vec{T} = (1, \varphi'(m_1)). \tag{2.3}$$

La droite tangente a pour équation

$$x_2 = \varphi'(m_1)(x_1 - m) + \varphi(m_1).$$

Notons pour finir que si tous les points sont ordinaires, alors le vecteur $M'(t)$ ne s'annule jamais, et le paramétrage nous fournit également une **orientation** de la courbe \mathcal{C} . On introduit dans ce contexte la définition suivante :

Définition 4. On dit que le paramétrage $t \mapsto M(t)$ est naturel si et seulement si on

$$\|M'(t)\| = 1. \tag{2.4}$$

Bien entendu, dans un paramétrage naturel, tous les points sont ordinaires. Réciproquement, si pour un paramétrage tous les points sont ordinaires, on peut reparamétrer la courbe en introduisons un paramétrage naturel, sous la forme

$$\tilde{M}(s) = M \circ \varphi(s).$$

On a en effet

$$\frac{d\tilde{M}}{ds}(s) = M'(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s)$$

de sorte que

$$\left\| \frac{d\tilde{M}}{ds}(s) \right\| = \|M'(\varphi(s))\| \|\varphi'(s)\|,$$

de sorte que le réparamétrage doit vérifier l'équation

$$\varphi'(s) = \frac{1}{\|M'(\varphi(s))\|},$$

équation que l'on peut intégrer, grâce en particulier au Théorème de *Cauchy-Lipschitz*.

Lorsque le paramétrage est naturel, on note souvent s la variable du paramétrage (que l'on appelle abscisse curviligne) et

$$\vec{T}(s) = \frac{d\tilde{M}}{ds}(s),$$

le vecteur tangent, qui est alors *unitaire*, car $\|\vec{T}(s)\| = 1$.

Longueur d'une courbe. Soit \mathcal{C} une courbe paramétrée par $t \mapsto M(t)$, $t \in I = [a, b]$. On suppose que tous les points sont ordinaires, c'est à dire que M' ne s'annule pas sur I , et qu'il est bijective de I vers \mathcal{C} .

Définition 5. On appelle longueur de \mathcal{C} la quantité

$$L(\mathcal{C}) = \int_a^b \|M'(t)\| dt.$$

Cette quantité est positive, éventuellement infinie, et ne dépend pas de l'orientation. On vérifie par ailleurs que $L(\mathcal{C})$ est *indépendant du paramétrage choisi*. Si le paramétrage est naturel, on a donc

$$L(\mathcal{C}) = \int_a^b ds.$$

Exemple 3. Si une courbe est définie comme graphe d'une fonction $f = [a, b]$ sur un intervalle, c'est à dire $\mathcal{C} = \{(x, \varphi(x)), x \in I\}$, alors, on a

$$L(\mathcal{C}) = \int_a^b \|\vec{T}(x)\| dx,$$

où le vecteur tangent $T(x)$ est donné par la formule (2.3), c'est à dire $T(x) = (1, \varphi'(x))$ de sorte que $\|\vec{T}(x)\| = \sqrt{1 + \varphi'(x)^2}$. Il en résulte que

$$L(\mathcal{C}) = \int_a^b \sqrt{1 + \varphi'(x)^2} dx.$$

Exemple 4. Calculons la longueur du cercle \mathcal{S}_R de rayon R . Un paramétrage est fourni par l'application $M : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (R \cos t, R \sin t)$ de sorte de $\frac{d}{dt}M(t) = (-R \sin t, R \cos t)$ et donc $\|M(t)\| = \sqrt{R^2 \cos^2 t + R^2 \sin^2 t} = R$. Il vient ainsi

$$L(\mathcal{S}_R) = \int_0^{2\pi} R dt = 2\pi R.$$

Exemple 5. Calculons la longueur d'une ellipse $\mathcal{E}_{a,b}$, où $a \geq b > 0$, paramétrée par $M : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto M(t) = (a \cos t, b \sin t)$. On a donc $\frac{d}{dt}M(t) = (-a \sin t, b \cos t)$, et ainsi

$$\left\| \frac{d}{dt}M(t) \right\| = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} = \sqrt{a^2 + (b^2 - a^2) \cos^2 t},$$

et donc

$$L(\mathcal{E}_{a,b}) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + (b^2 - a^2) \cos^2 t} dt = 2I, \text{ où } I = \int_0^\pi \sqrt{a^2 + (b^2 - a^2) \cos^2 t} dt,$$

intégrale que l'on ne sait pas intégrer explicitement...

2.3 Graphes, lignes de niveau

Soit F une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} , $D = \mathcal{D}_f$ son domaine de définition. Si $X \in D$ est un point de coordonnées (x_1, x_2) , on notera indifféremment $f(X)$ ou $f(x_1, x_2)$ son image.

Exemple 6. Souvent, comme dans le cas réel, les fonctions seront données à l'aide de formules.

- $f(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$, a et b donnés, est une fonction linéaire
- $f(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2 + c$ avec a, b, c donnés, est une fonction affine
- $f(x_1, x_2) = x_1^3 - x_2^2 + x_1 x_2 + x_1 + 2x_2 - 1$ est un polynôme.

La fonction

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{1 - x_1^2} + \sqrt{1 - x_2^2}$$

est définie quand $|x_1| \leq 1$ et $|x_2| \leq 1$ c'est à dire sur le carré de centre $0 = (0, 0)$ et de taille 2×2 avec bord. La fonction

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{1 - x_1^2} + \sqrt{1 - x_2^2}}$$

est définie pour $|x_1| \leq 1$ et $|x_2| \leq 1$ sauf pour $|x_1| = |x_2| = 1$ c'est à dire le carré de centre $0 = (0, 0)$ et de taille 2×2 avec bord, mais privé de ses quatres sommets. Enfin, la fonction

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}}$$

est définie pour $x_1^2 + x_2^2 < 1$ c'est à dire sur le disque sans bord de centre $0 = (0, 0)$ et de rayon 1.

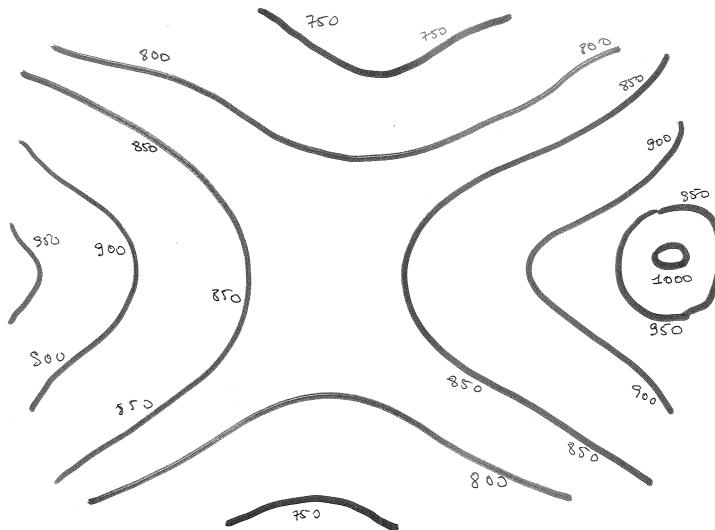
Des exemples de fonctions sur \mathbb{R}^2 abondent aussi dans de la vie courante : c'est le cas la fonction qui à tout point d'une carte associe l'altitude (carte IGN) en ce point, ou la température (carte météo).

Le graphe Γ_f de la fonction f est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ donné par l'ensemble des points de coordonnées $(x_1, x_2, f(x_1, x_2))$, où (x_1, x_2) parcours le domaine de définition :

$$\begin{aligned}\Gamma_f &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \text{tels que } (x_1, x_2) \in \mathcal{D}_f, x_3 = f(x_1, x_2)\} \\ &= \{(x_1, x_2, f(x_1, x_2)), (x_1, x_2) \in \mathcal{D}_f\} \subset \mathbb{R}^3\end{aligned}$$

C'est en général une surface. Par exemple, dans le cas des fonctions affines, le graphe est un plan affine de \mathbb{R}^3 .

Une autre idée introduite pour identifier la distribution des valeurs de f c'est de représenter les *lignes de niveau*. Elle est notamment utilisée en cartographie, et est un moyen particulièrement commode pour porter les altitudes sur une carte.



Une ligne de niveau, est, pour une valeur c donnée, constituée par l'ensemble des points (x_1, x_2) du domaine de définition de f dont l'image par f a pour valeur c . C'est donc l'ensemble de \mathbb{R}^2 défini par la relation

$$f(x_1, x_2) = c.$$

A chaque valeur de c correspond bien entendu une ligne de niveau, notée f^c . Une ligne de niveau peut être, entre autres, l'ensemble vide, réduite à un point, ou encore être une courbe ou un ensemble de courbes.

Exemple 7. Soit f la fonction affine donnée par $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + 1$. Les lignes de niveau sont donc les droites du plan d'équation

$$x_1 + x_2 = c - 1.$$

Si f est la fonction d'équation $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, alors la ligne de niveau c a pour équation

$$x_1^2 + x_2^2 = c.$$

elle est donc vide si $c < 0$, réduite au point 0 si $c = 0$, enfin pour $c > 0$, il s'agit du cercle centré à l'origine de rayon \sqrt{c} .

2.4 Limites, continuité

Les définitions que nous avons introduites au Chapitre 1 se transposent facilement au cas multi-dimensionnel.

Soit f une fonction sur \mathbb{R}^2 et M_0 un point donné de \mathbb{R}^2 . On supposera de plus que f est définie sur un disque ouvert non vide

$$D(M_0, R) \equiv \{X \in \mathbb{R}^2, \|X - M_0\| > r\}$$

$r > 0$, contenant M_0 , **sauf peut-être** en M_0 , c'est à dire que

$$D(M_0, R) \setminus \{M_0\} \subset \mathcal{D}_f.$$

Définition 6. On dit que la fonction f admet une limite L en M_0 , ou que $f(X)$ tend vers L lorsque X tend vers M_0 , si et seulement si :

Pour tout nombre réel $\epsilon > 0$, il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que la relation $0 < \|X - M_0\| < \alpha$ entraîne

$$|f(X) - L| < \epsilon.$$

On vérifie que si une limite L existe, alors elle est forcément unique. On note alors

$$L = \lim_{X \rightarrow M_0} f(X) \text{ ou encore } f(X) \xrightarrow[X \rightarrow M_0]{} L.$$

La propriété précédente exprime le fait que si $X \neq X_0$ se trouve à une distance de M_0 inférieure à $\alpha > 0$, qui dépend bien entendu de ϵ , alors la différence entre $f(X)$ et L est nécessairement inférieure à ϵ . On a, comme au chapitre 1 :

Proposition 2. *Soient f et g deux fonctions sur \mathbb{R}^2 telles que f et g admettent comme limite en M_0 les nombres L et K . Les fonctions $f \pm g$ et fg admettent alors les limites suivantes en X_0 :*

$$\lim_{X \rightarrow X_0} (f \pm g)(X) = L \pm K \text{ et } \lim_{X \rightarrow X_0} (fg)(X) = LK.$$

de plus, si $K \neq 0$ alors on a

$$\lim_{X \rightarrow X_0} \frac{f}{g}(X) = \frac{L}{K}.$$

La notion de continuité découle directement de celle de limite.

Définition 7. *On suppose que f est aussi définie en X_0 . On dit que f est continue en M_0 si et seulement si f admet une limite en M_0 , égale à sa valeur $f(M_0)$ en ce point.*

Il résulte immédiatement de la Proposition 2 que si f et g sont deux fonctions continues en un point M_0 , alors $f + g$, $f - g$, fg sont également continues en ce point. Si $g(M_0) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est également continue en X_0 .

Exemple 8. Les fonctions polynôiales, c'est à dire du type

$$f(x_1, x_2) = \sum_{i,j=0}^n a_{ij} x_1^i x_2^j$$

sont continues en tout point de \mathbb{R}^2 . Les exemples les plus simples de telles fonctions sont les fonctions affines, de la forme

$$f(x_1, x_2) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + b.$$

Par ailleurs, si g est une fonction d'une variable réelle continue sur un intervalle ouvert I , alors la fonction de deux variables f définie par

$$f(x_1, x_2) = g(x_1) \quad (2.5)$$

est continue sur $I \times \mathbb{R}$.

Nous aurons à plusieurs reprises à considérer des fonctions F de \mathbb{R}^2 à valeurs dans \mathbb{R}^2 . Une telle fonction peut donc s'écrire

$$F(x_1, x_2) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$$

où f_1 et f_2 désignent des fonctions de deux variables à valeurs réelles, c'est à dire de \mathbb{R}^2 vers \mathbb{R} . Nous dirons que F est continue en X_0 si et seulement si les deux fonctions f_1 et f_2 sont continues en X_0 .

Remarque 3. On pourra vérifier que F est continue en X_0 si et seulement si pour tout nombre réel $\epsilon > 0$, il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que la relation $0 < \|X - X_0\| < \alpha$ entraîne

$$\|F(X_0) - F(X)\| < \epsilon.$$

Passons maintenant à la loi de composition \circ , pour laquelle il convient de distinguer plusieurs cas, au vu des divers types de fonctions que nous avons considérés jusqu'à présent.

Considérons tout d'abord une fonction à deux variables f , c'est à dire de \mathbb{R}^2 à valeurs dans \mathbb{R} , supposée continue en un point X_0 de \mathcal{D}_f . Soit ensuite une fonction h d'une variable réelle, c'est à dire de \mathbb{R} vers \mathbb{R} , définie en $f(X_0)$ et continue en ce point de \mathbb{R} . On a alors

Proposition 3. Si f , h , X_0 sont comme ci-dessus, alors la fonction $h \circ f$, définie par $(h \circ f)(X) = h(f(X))$ est continue en X_0 .

Exemple 9. la fonction g définie par

$$g(x_1, x_2) = e^{x_1^2 + x_2^2}$$

est définie sur tout \mathbb{R}^2 . On peut écrire $g = h \circ f$, où f est la fonction polynômale de deux variables définie par $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ et la fonction h est la fonction d'une variable réelle définie par $h(x) = e^x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ces deux fonctions étant continues, il en résulte que g l'est également.

Considérons maintenant un deuxième type de composition celui où on commence par une fonction h de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R}^2 c'est à dire de la forme

$$h(x) = (h_1(x), h_2(x))$$

Si F est une fonction de deux variables. Soit x_0 un point de \mathbb{R} . On suppose que h_1 et h_2 sont continues en x_0 et que F est continue en $h(x_0)$. on a

Proposition 4. Si f , h , x_0 sont comme ci-dessus, alors la fonction $f \circ h$, définie par $(f \circ h)(x) = f(h(x))$ est continue en x_0 .

Considérons enfin un dernier cas, celui où on a deux fonctions F et H de \mathbb{R}^2 vers \mathbb{R}^2 telles que F est continue en X_0 et H continue en $F(X_0)$. alors

Proposition 5. La fonction $F \circ H$, définie par $(F \circ H)(x) = F(H(x))$ est continue en X_0 .

2.5 La notion de dérivée partielle

Considérons une fonction de deux variables réelles et un point $M = (m_1, m_2)$ de \mathbb{R}^2 . Si l'on fixe l'une des variables, et que l'on fait varier l'autre, on obtient une fonction d'une variable réelle. Plus précisément, posons pour $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} f_1(t) = f(m_1 + t, m_2) \\ f_2(t) = f(m_1, m_2 + t). \end{cases}$$

Pour définir la fonction f_1 on se restreint donc à la droite horizontale D_1 passant par M d'équation $x_2 = m_2$, ou encore de paramétrage $x_1 = m_1 + t$, $x_2 = m_2$ et de même pour définir f_2 on se restreint à la droite verticale D_2 passant par M et d'équation $x_1 = m_1$, encore de paramétrage $x_1 = m_1$, $x_2 = m_2 + t$. On suppose par ailleurs que les fonctions f_1 et f_2 sont dérивables en $t = 0$. Les dérivées partielles correspondent alors aux dérivées en 0 des fonctions précédentes.

Définition 8. On appelle *dérivée partielle* de f en M_0 par rapport à la variable x_1 la dérivée $f'_1(0)$. On la note

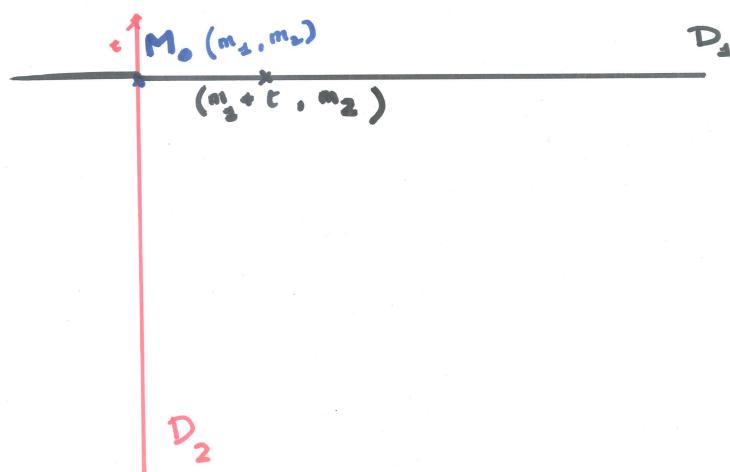
$$f'_{x_1}(M_0), \partial_{x_1} f(M_0) \text{ ou encore } \frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0).$$

On a donc

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(m_1 + t, m_2) - f(m_1)}{t}.$$

De même, on appelle *dérivée partielle* de f en M par rapport à la variable x_2 la dérivée $f'_2(0)$. On la note $f'_{x_2}(M_0)$, $\partial_{x_2} f(M_0)$ ou encore $\frac{\partial f}{\partial x_2}(M_0)$. On a donc

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(M_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(m_1, m_2 + t) - f(m_1)}{t}.$$



Remarque 4. Notons, par ailleurs que si f_1 est dérivable, alors

$$f'_1(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(m_1 + t, m_2)$$

et de même si f_2 est dérivable, alors

$$f'_2(t) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(m_1, m_2 + t).$$

Lorsque les dérivées partielles existent en tout point du domaine \mathcal{D} , elles définissent des fonctions à deux variables sur ce domaine, que l'on note

$$f'_{x_1}, f'_{x_2}, \text{ ou } \partial_{x_1} f, \partial_{x_2} f \text{ ou encore } \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}.$$

Exemple 10. Considérons le polynôme $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^3 + x_1 x - 2$. On a

$$f'_{x_1}(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \text{ et } f'_{x_2} = 3x_2^2 + x_1.$$

Comme dans le cas de fonctions d'une seule variable, on a les règles de calcul suivantes :

Proposition 6. On a pour $i = 1, 2$

$$(f \pm g)_{x_i} = f'_{x_i} \pm g'_{x_i}, (fg)_{x_i} = f'_{x_i} g + f g'_{x_i}.$$

De plus si là où g ne s'annule pas

$$\left(\frac{f}{g}\right)'_{x_i} = \frac{f'_{x_i} g - f g'_{x_i}}{g^2}.$$

Notons également la propriété suivante :

Proposition 7. Soit f une fonction dérivable sur \mathbb{R}^2 . On suppose que

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0.$$

alors il existe une fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$f(x_1, x_2) = g(x_2),$$

c'est à dire que f ne dépend que de la variable x_2 . De plus, on a

$$g'(x_2) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2).$$

Démonstration. Par intégration, on a

$$f(x_1, x_2) = f(0, x_2) + \int_0^{x_1} \frac{\partial f}{\partial x_1}(s, x_2) ds = f(0, x_2).$$

En posant $g(x_2) = f(0, x_2)$ la conclusion en découle. □

2.5.1 Développement limité à l'ordre 1

Afin de pouvoir écrire un développement limité au premier ordre près d'un point $M = (m_1, m_2)$ donné, il faut, non seulement supposer que la fonction possède des dérivées partielles en ce point, mais également que ces dernières soient définies et continues dans un voisinage de ce point : les hypothèses sont donc plus exigeantes qu'en dimension 1. Dans ces conditions, on a

Proposition 8. *On suppose que f'_{x_i} est définie et continue près de $M = (m_1, m_2)$, pour $i = 1, 2$. Alors on a pour $h = (h_1, h_2)$ petit*

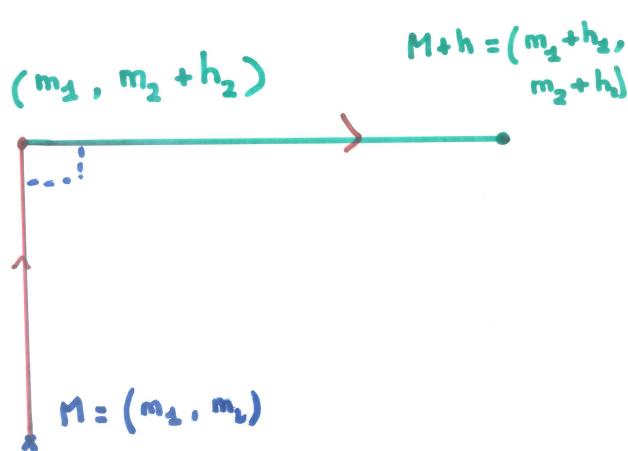
$$f(M + h) = f(m_1 + h_1, m_2 + h_2) = f(m_1, m_2) + h_1 f'_{x_1}(m_1, m_2) + h_2 f'_{x_2}(m_1, m_2) + \|h\| \varepsilon(h), \quad (2.6)$$

où la fonction ε est définie près de 0 et vérifie

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Idée de la démonstration. On se déplaçant selon des lignes horizontales et verticales uniquement, on peut décomposer :

$$\begin{aligned} F(M + h) - F(M) &= [f(m_1 + h_1, m_2 + h_2) - f(m_1, m_2 + h_2)] + [f(m_1, m_2 + h_2) - f(m_1, m_2)] \\ &= \int_0^{h_1} f'_{x_1}(m_1 + s, m_2 + h_2) ds + \int_0^{h_2} f'_{x_2}(m_1, m_2 + s) ds \\ &= h_1 f'_{x_1}(M) + h_2 f'_{x_2}(M) + \\ &\quad \int_0^{h_1} [f'_{x_1}(m_1 + s, m_2 + h_2) - f'_{x_1}(M)] ds + \int_0^{h_2} [f'_{x_2}(m_1, m_2 + s) - f'_{x_2}(M)] ds \end{aligned} \quad (2.7)$$



Posons pour $r > 0$ et

$$\varepsilon(r) = \sup_{X \in D(M, r), i=1,2} |f'_{x_i}(X) - f'(M)|.$$

Comme f'_{x_i} est supposée continue en M , nous obtenons

$$\lim_{r \rightarrow 0} \varepsilon(r) = 0.$$

Par ailleurs, en revenant à (2.7), on trouve

$$|F(M + h) - F(M) - h_1 f'_{x_1}(M) - h_2 f'_{x_2}(M)| \leq (|h_1| + |h_2|) \varepsilon(\|h\|),$$

d'où la conclusion découle. \square

2.5.2 Le gradient

Si f est dérivable au point M , alors on introduit le vecteur gradient de f , noté ∇f ou $\overrightarrow{\text{grad}}f$ par

$$\overrightarrow{\text{grad}}f(M) = (f'_{x_1}(M), f'_{x_2}(M)).$$

Si f est dérivable sur tout le domaine D , on définit ainsi une nouvelle fonction de deux variables à valeurs dans \mathbb{R}^2 . Sous les mêmes hypothèses qu'au paragraphe précédent sur f , on peut écrire le développement (2.6) sous la forme condensée

$$f'(M+h) - f(M) = h \cdot \overrightarrow{\text{grad}}f(M) + \|h\|\varepsilon(h). \quad (2.8)$$

Considérons maintenant une droite quelconque D passant par M , de vecteur directeur \vec{e} , supposé de norme 1, c'est à dire $\|e\| = 1$. Si on paramètre la droite par $M(t) = M + t\vec{e}$, et que s'intéresse à la restriction f_D définie par

$$f_D(s) = f(M + s\vec{e})$$

la formule (2.8) montre alors que f_D est dérivable en 0 et

$$f'_D(0) = \vec{e} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}f(m).$$

On peut en conclure que f est dérivable dans toutes les directions, et que la direction dans laquelle la fonction croît le plus est celle du *gradient*.

On a par ailleurs :

Proposition 9. *Soit f une fonction dérivable sur \mathbb{R}^2 telle que*

$$\overrightarrow{\text{grad}}f = 0.$$

Alors la fonction f est constante, c'est à dire il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que

$$f = c.$$

Démonstration. La propriété résulte directement de la Proposition 7. En effet, comme $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0$, on a

$$f(x_1, x_2) = g(x_2),$$

pour une fonction d'une variable g . Comme par ailleurs

$$g'(x_2) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 0,$$

la fonction g est constante et la conclusion en découle.

Remarque 5. On montre de même que si $\overrightarrow{\text{grad}}f = (a_1, a_2)$ est un vecteur constant sur \mathbb{R}^2 alors la fonction f est nécessairement une fonction affine. Pour s'en convaincre, Il suffit de considérer la fonction $g(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) - (a_1 x_1 + a_2 x_2)$ et de vérifier que $\overrightarrow{\text{grad}}g = (0, 0)$.

2.5.3 Dérivation des fonctions composées

Nous avons rencontré plusieurs exemples de fonction composées à la Section 2.4. Voyons maintenant comment dériver de telles fonctions, en commençant par quelques situations simples.

Premier exemple. Soit f une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 et g une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On considère la fonction G définie par $G = g \circ f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $M \mapsto G(M) = g(f(M))$, pour $M \in \mathbb{R}^2$. On a alors

Proposition 10. *On suppose f dérivable en M et g dérivable en $f(M)$. Alors G est dérivable en M et*

$$G'_{x_i}(M) = g'(f(M))f'_{x_i}(M), \text{ pour } i = 1, 2,$$

et donc $\overrightarrow{\text{grad}} G(M) = g'(f(M))\overrightarrow{\text{grad}} f(M)$.

Preuve. Pour $i = 1$, et $t \in \mathbb{R}$ petit, on a, si $M = (m_1, m_2)$

$$G(m_1 + t, m_2) - G(m_1, m_2) = g(f(m_1 + t, m_2)) - g(f(m_1, m_2)) = g(f_1(t)) - g(f_1(0)),$$

et donc

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{G(m_1 + t, m_2) - G(m_1, m_2)}{t} = (g \circ f_1)'(0) = g'(f_1(0))f_1'(0) = g'(f(M))f'_{x_1}(M).$$

□

Deuxième exemple. Soit f une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} , dérivable dans le voisinage d'un point M , de dérivées continues, et soit \vec{n} une fonction d'une variable s à valeur dans \mathbb{R}^2

$$\vec{n}(s) = (n_1(s), n_2(s)),$$

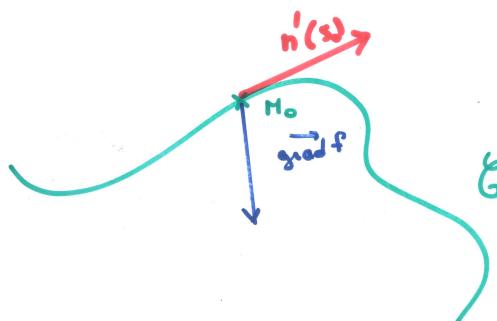
telle que $\vec{n}(s_0) = M$. On suppose h dérivable en s_0 . Une telle fonction \vec{n} représente par exemple le paramétrage d'une courbe \mathcal{C} , ou la trajectoire d'une particule se déplaçant le long de \mathcal{C} au cours du temps désigné par la variable s . On s'intéresse ici à fonction $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\phi(s) = f \circ \vec{n}(s) = f(\vec{n}(s)).$$

Si on reprend l'image de la particule se déplaçant sur la courbe \mathcal{C} , alors $\phi(s)$ désigne la valeur de f au temps s mesurée sur la particule.

Proposition 11. *La fonction $\phi = f \circ \vec{n}$ de \mathbb{R} à valeur dans \mathbb{R} est dérivable en s_0 et*

$$\begin{aligned} \phi'(s) &= (f \circ \vec{n})'(s_0) = \vec{n}'(s_0) \cdot \overrightarrow{\text{grad}} f(M) = \vec{n}'(s_0) \cdot \overrightarrow{\text{grad}} f(\vec{n}(s_0)) \\ &= f'_{x_1}(\vec{n}(s_0))n'_1(s_0) + f'_{x_2}(\vec{n}(s_0))n'_2(s_0). \end{aligned}$$



Idée de la démonstration. On passe par les développements limités à l'ordre 1. On écrit tout d'abord le développement limité de \vec{n} près de s_0 , à savoir pour h petit

$$\vec{n}(s_0 + h) = \vec{n}(s_0) + h \cdot \vec{n}'(s_0) + h \varepsilon(h), \text{ où } \varepsilon(h) \rightarrow 0 \text{ lorsque } h \rightarrow 0.$$

Posons

$$\vec{k}(h) = \vec{n}(s_0 + h) - M = h(\vec{n}'(s_0) + \varepsilon(h)),$$

de sorte que $\|\vec{k}(h)\| \leq C|h|$ pour h petit, où C est une constante. Utilisons maintenant 2.8, à savoir $f(n(s_0 + h)) - f(M) = f(M + k(h)) - f(M) = \vec{k}(h) \cdot \overrightarrow{\text{grad}} f(M) + \|\vec{k}(h)\| \tilde{\varepsilon}(\vec{k}(h))$, où $\tilde{\varepsilon}(\vec{k}) \rightarrow 0$ lorsque $\vec{k} \rightarrow 0$,

$$= h(\vec{n}'(s_0) \cdot \overrightarrow{\text{grad}} f(M) + h \varepsilon_2(h)),$$

où $\varepsilon_2(h) \rightarrow 0$ lorsque $h \rightarrow 0$. \square

Troisième exemple. Voyons maintenant une autre situation tout aussi importante, et qui correspond en particulier à des changements de variables. Soit U une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 , qui peut donc s'écrire sous la forme

$$U(X) = (u_1(X), u_2(X))$$

qui sera supposé dérivable près d'un point M donné, de dérivées continues, c'est à dire telle que u_1 et u_2 sont dérivables, de dérivées partielles continues. Soit f une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} dérivable près de $U(M)$ de dérivées partielles continues. Considérons la fonction $F = f \circ U$

$$F(M) = f(u_1(M), u_2(M)).$$

Proposition 12. La fonction $F = f \circ U$ est différentiable en M . De plus

$$\begin{cases} F'_{x_1}(M) = f'_{u_1}(U(M))(u_1)'_{x_1}(M) + f'_{u_2}(U(M))(u_2)'_{x_1}(M) \\ F'_{x_2}(M) = f'_{u_1}(U(M))(u_1)'_{x_2}(M) + f'_{u_2}(U(M))(u_2)'_{x_2}(M). \end{cases} \quad (2.9)$$

Idée de la démonstration. Pour $t \in \mathbb{R}$ petit, on a

$$F(m_1 + t, m_2) = f \circ \vec{n}(t),$$

où \vec{n} une une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^2 définie par $\vec{n}(t) = (u_1(m_1 + t, m_2), u_2(m_1 + t, m_2))$. On a

$$\vec{n}'(0) = ((u_1)'_{x_1}(M), (u_2)'_{x_1}(M)),$$

On a donc, en utilisant la Proposition 11 il vient

$$F'_{x_1}(M) = (f \circ \vec{n})'(0) = \vec{n}'(0) \cdot \overrightarrow{\text{grad}} f(M),$$

ce qui donne le résultat.

Remarque 6. Nous verrons plus loin que ce résultat s'écrit de manière plus condensée en utilisant la matrice jacobienne de U donnée par

$$D_U(M) = \begin{pmatrix} (u_1)'_{x_1} & (u_1)'_{x_2} \\ (u_2)'_{x_1} & (u_2)'_{x_2} \end{pmatrix}$$

Les relations (2.9) s'écrivent alors sous forme matricielle

$$\overrightarrow{\text{grad}} F(M) = \overrightarrow{\text{grad}} f(U(M)) \cdot D_U(M), \quad (2.10)$$

où le point \cdot désigne la multiplication des matrices et $\overrightarrow{\text{grad}} f$ est considéré comme un vecteur ligne.

Exemple 11. Illustrons le calcul précédent en voyons comment différentier une fonction en *coordonnées polaires*. Rappelons que si $X = (x_1, x_2)$ est un point du plan \mathbb{R}^2 de coordonnées polaires (r, θ) , avec $r \geq 0$, alors

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta.$$

Ceci nous conduit à introduire l'application Φ de $\mathcal{D} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ dans \mathbb{R}^2 définie par

$$\Phi(r, \theta) = (\Phi_1(r, \theta), \Phi_2(r, \theta)) = (r \cos \theta, r \sin \theta). \quad (2.11)$$

On vérifie que Φ est dérivable sur son domaine de définition et que ses dérivées partielles sont continues. En effet, on a

$$\begin{cases} (\Phi_1)'_r(r, \theta) = \cos \theta, & (\Phi_1)'_\theta(r, \theta) = -r \sin \theta \\ (\Phi_2)'_r(r, \theta) = \sin \theta, & (\Phi_2)'_\theta(r, \theta) = r \cos \theta. \end{cases}$$

Si f est une fonction définie en coordonnées cartésiennes, son expression *en coordonnées polaires* sera $F = f \circ \Phi$. On aura donc

$$F'_r(r, \theta) = f'_{x_1}(M) \sin \theta + f'_{x_2}(M) \cos \theta \quad (2.12)$$

et

$$F'_\theta(r, \theta) = f'_{x_1}(M) r \cos \theta - f'_{x_2}(M) r \sin \theta. \quad (2.13)$$

On peut réécrire ces formules en introduisant les vecteurs unitaires

$$\vec{e}_r = \frac{M}{\|M\|} = (\cos \theta, \sin \theta), \text{ et } \vec{e}_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta)$$

qui sont orthogonaux, de sorte que

$$F_r(r, \theta) = \vec{e}_r \cdot \overrightarrow{\text{grad}} f \text{ et } F_\theta(r, \theta) = r \vec{e}_\theta \cdot \overrightarrow{\text{grad}} f.$$

Remarquons que l'on peut déduire de ces calculs l'expression de $\overrightarrow{\text{grad}} f$ en coordonnées polaires, à savoir

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = F_r(r, \theta) \vec{e}_r + \frac{1}{r} F_\theta(r, \theta) \vec{e}_\theta.$$

Remarque 7. Remarquons que l'on peut également écrire la formule (2.12) sous la forme

$$r \frac{\partial F}{\partial r} = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}$$

et la formule (2.13) sous la forme

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2}.$$

2.5.4 La matrice Jacobienne

Il est possible de donner une forme plus concise aux résultats précédents en introduisant la matrice Jacobienne. Considérons de manière générale une application \vec{f} de \mathbb{R}^k vers \mathbb{R}^n , où les nombres k et n peuvent prendre les valeurs 1, 2, voire 3 dans les chapitres ultérieurs. On peut écrire

$$\vec{f}(x_1, \dots, x_k) = (f_1(x_1, \dots, x_k), \dots, f_n(x_1, \dots, x_k)).$$

On dira que \vec{f} est dérivable si et seulement si toutes les fonctions f_i le sont, pour $i = 1, \dots, k$. On introduit alors la matrice $D_{\vec{f}}$ à n lignes et k colonnes, matrice dont les lignes sont composées des gradients des fonctions f_i , $i = 1, \dots, n$. On a donc

$$D_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_k} \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Exemple 12. Soit F est une application linéaire de \mathbb{R}^k vers \mathbb{R}^n définie par une matrice

$$A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k}$$

à n lignes et k colonnes, c'est à dire telle que

$${}^t f(\vec{X}) = A {}^t \vec{X}. \quad (2.15)$$

Ici ${}^t f$ et ${}^t \vec{X}$ désignent les vecteurs **colonnes** associés aux vecteurs *lignes* $\vec{f}(x)$ et \vec{X} respectivement (ce sont aussi leurs matrices transposée, si on considère ces vecteurs lignes comme des matrices). Plus précisement, on a

$${}^t \vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \text{ et } {}^t \vec{f}(X) = \begin{pmatrix} f_1(X) \\ \vdots \\ f_n(X) \end{pmatrix}$$

la relation matricielle (2.15) donne donc $f_i(X) = a_{i,1}x_1 + \dots + a_{i,k}x_k$. Alors

$$D_f(X) = A, \forall X \in \mathbb{R}^k.$$

Si par ailleurs, on note comme précédemment

$${}^t \vec{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_k \end{pmatrix}$$

alors les développements limités du type (2.8) peuvent s'écrire

$$\vec{f}(M + h) - \vec{f}(M) = D_f(M) \cdot {}^t \vec{h} + \|h\| \varepsilon(h), \quad (2.16)$$

où ε tend vers 0 lorsque h tend vers 0 (c'est à dire chacune de ses composantes), et où le produit $D_f(M) \cdot {}^t \vec{h}$ désigne la multiplication des matrices, c'est à dire

$$D_f(M) \vec{h} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_k \end{pmatrix}.$$

Le produit précédent définit une application linéaire

$$\vec{h} \mapsto D_f(M) \cdot {}^t \vec{h}$$

de \mathbb{R}^k à valeurs dans \mathbb{R}^n . Cette application est appelée *application linéaire tangente* à f au point M . L'application *affine*

$$\vec{h} \mapsto D_f(M) \cdot \vec{h} + \vec{f}(M)$$

est une *approximation* à l'ordre 1 de f près de M .

Proposition 13. Si Φ est une fonction \mathbb{R}^n vers \mathbb{R}^k dérivable de dérivées continues près de M et F une fonction de \mathbb{R}^k vers \mathbb{R}^ℓ , dérivable de dérivées continues près de $\Phi(M)$ alors $F \circ \Phi$ est dérivable près de M et la matrice Jacobienne de la composée $F \circ \Phi$ en M est donnée par

$$D_{f \circ \Phi}(M) = D_f(\Phi(M)) \cdot D_\Phi(M). \quad (2.17)$$

Si Φ est une une fonction de \mathbb{R}^n vers \mathbb{R}^n , dérivable de dérivées continues près de M , telle que Φ^{-1} existe près de $\Phi(M)$ et telle que $d_\Phi(M)$ soit inversible, alors

$$D_{\Phi^{-1}}(\Phi(M)) = (D_\Phi(M))^{-1}.$$

Exemple 13. Reprenant l'application Φ donnée par (2.11) et qui exprime les coordonnées cartésiennes en fonctions des coordonnées polaires. Sa matrice jacobienne est donc

$$d_\Phi(r, \theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

La matrice inverse de cette matrice se calcule comme

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{1}{r} \sin \theta & \frac{1}{r} \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Il résulte donc de la proposition que l'on a

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x_1} & \frac{\partial r}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x_1} & \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{1}{r} \sin \theta & \frac{1}{r} \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{x_1}{r} & \frac{x_2}{r} \\ -\frac{x_2}{r^2} & \frac{x_1}{r^2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

2.5.5 Dérivées secondes

Lorsque f est dérivable sur l'ensemble de son domaine de définition, ceci définit de nouvelles fonctions, les dérivées partielles. Lorsque ces dernières sont elles-mêmes dérивables, les dérivées de ces dernières sont *appelées les dérivées secondes*. Ainsi, si f est une fonction sur \mathbb{R}^2 on a 4 dérivées partielles d'ordre 2, à savoir

$$f''_{x_1 x_1} = (f'_{x_1})_{x_1}, f''_{x_1 x_2} = (f'_{x_1})_{x_2}, f''_{x_2 x_1} = (f'_{x_2})_{x_1} \text{ et } f''_{x_2 x_2} = (f'_{x_2})_{x_2}$$

on utilise aussi souvent les notations

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_2}.$$

En guise d'exemple on peut remarquer que si f est une fonction *affine*, toutes les dérivées secondes sont *nulles*. C'est d'ailleurs une condition nécessaire et suffisante, lorsque le domaine est connexe.

Dans l'exemple 10 ci-dessus, on obtient, dans l'ordre, les fonctions suivantes :

$$2, 1, 1, 6x_2.$$

On constate sur cet exemple que les dérivées secondes "croisées" sontégales. Ceci est en fait une conséquence du résultat général suivant, souvent appelé *Théorème de Schwarz* ou *de Clairaut-Schwarz*.

Théorème 1. *Si les dérivées secondes existent et sont continues près d'un point M donné, alors on a l'identité*

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right) (M) = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) (M).$$

c'est à dire

$$f''_{x_1 x_2}(M) = f''_{x_2 x_1}(M).$$

Idée de la démonstration. Supposons pour simplifier que $M = 0$ et, de plus, que $f(0)$ et les dérivées partielles premières de f sont nulles en $M = 0$: on peut toujours se ramener à ce dernier cas en soustrayant à f l'application affine tangente en $M = 0$, les dérivés secondes restant inchangées. Dans ces conditions, réécrivons, pour $h = (h_1, h_2)$ donnés, la décomposition (2.7) sous la forme

$$f(h) = \int_0^{h_2} \frac{\partial f}{\partial x_2}(0, s) ds + \int_0^{h_1} \frac{\partial f}{\partial x_1}(s, h_2) ds. \quad (2.19)$$

Par intégration on peut écrire pour $0 \leq s \leq h_2$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(0, s) = \int_0^s \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_2}(0, t) dt = s \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_2}(0, 0) + \|h\| \varepsilon_1(h), \quad (2.20)$$

où la fonction ε_1 tend vers 0 quand h tend vers 0. De même, on a pour $0 \leq s \leq h_1$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(s, h_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(0, h_2) + \int_0^s \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1}(t, h_2) dt.$$

Comme on a par ailleurs

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0, h_2) = \int_0^{h_2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(0, t) dt = h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(0, 0) + \|h\| \varepsilon_2(h)$$

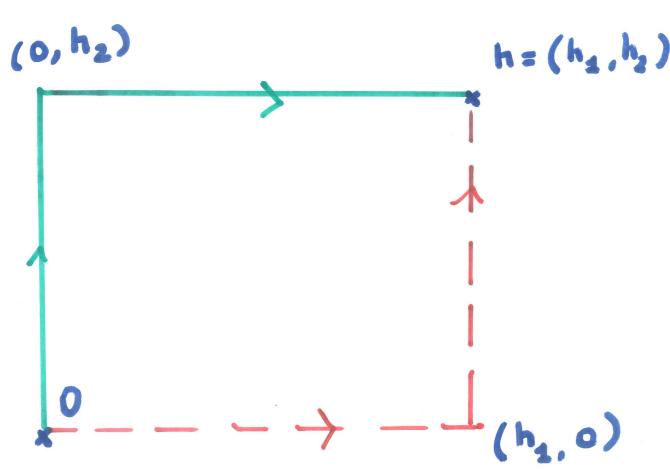
où la fonction ε_2 tend vers 0 quand h tend vers 0, de sorte que

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(s, h_2) = s \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1}(0, 0) + h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(0, 0) + \|h\| \varepsilon_3(h). \quad (2.21)$$

où la fonction ε_3 tend vers 0 quand h tend vers 0. En reportant les développements (2.20) et (2.21) dans (2.19), on obtient après intégration, le développement limité

$$f(h) = \frac{1}{2} h_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1}(0, 0) + h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(0, 0) + \frac{1}{2} h_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_2}(0, 0) + \|h\|^2 \varepsilon(h). \quad (2.22)$$

où la fonction ε tend vers 0 quand h tend vers 0. Rappelons que nous avons obtenu cette formule en partant de l'égalité (2.19), qui correspond à une intégration en suivant le chemin vert ci-dessous



Si nous remplaçons le chemin en trait plein vert par le chemin en pointillés rouge, alors nous obtenons la formule

$$f(h) = \int_0^{h_1} \frac{\partial f}{\partial x_1}(s, 0) ds + \int_0^{h_2} \frac{\partial f}{\partial x_2}(h_1, s) ds. \quad (2.23)$$

qui par des arguments analogues à ceux développés plus haut mènent au développement limité

$$f(h) = \frac{1}{2} h_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1}(0, 0) + h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0, 0) + \frac{1}{2} h_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_2}(0, 0) + \|h\|^2 \tilde{\varepsilon}(h). \quad (2.24)$$

où la fonction $\tilde{\varepsilon}$ tend vers quand h tend vers 0. Comme on peut identifier les premiers termes des deux développements, la conclusion en résulte.

□

Remarque 8. Lorsque f admet toutes les dérivées jusqu'à l'ordre n et lorsque ces dérivées sont continues, alors l'ordre dans lequel on effectue les dérivation n'a aucune importance. Pour n dérivations où interviennent p la variable x_1 et q fois la variable x_2 , avec $n = p + q$ on note

$$\frac{\partial^n f}{\partial^p x_1 \partial^q x_2}$$

la dérivée partielle correspondante. Par exemple pour $n = 3$ les dérivées partielles d'ordre 3 sont

$$\frac{\partial^3 f}{\partial^3 x_1}, \frac{\partial^3 f}{\partial^2 x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial^2 x_2}, \frac{\partial^3 f}{\partial^3 x_2}.$$

Notons que nous avons obtenu lors de la preuve du Théorème 1 le développement d'ordre 2 d'une fonction à deux variables. On a donc :

Théorème 2. *Si les dérivées secondes existent et sont continues près d'un point M donné, alors on a pour $h = (h_1, h_2)$*

$$\begin{aligned} f(M + h) &= f(M) + h \cdot \overrightarrow{\text{grad}} f(M) + \frac{1}{2} h_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1}(M) + h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(M) + \frac{1}{2} h_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_2}(M) \\ &\quad + \|h\|^2 \varepsilon(h) \\ &= f(M) + h \cdot \overrightarrow{\text{grad}} f(M) + \frac{1}{2} \text{Hess } f(M) \cdot (h, h) + \|h\|^2 \varepsilon(h), \end{aligned} \quad (2.25)$$

où la fonction ε tend vers quand h tend vers 0, où $\text{Hess } f(M)$ désigne la matrice symétrique

$$\text{Hess } f(M) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(M) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(M) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(M) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(M) \end{pmatrix}.$$

et l'expression $\text{Hess } f(M) \cdot (\vec{h}, \vec{h})$ la forme quadratique associée, c'est à dire

$$\begin{aligned} \text{Hess } f(M) \cdot (\vec{h}, \vec{h}) &= \vec{h} \cdot \text{Hess } f(M)^t \vec{h} \\ &= (h_1, h_2) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(M) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(M) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(M) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(M) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2.6 Le théorème des fonctions implicites

Nous avons vu jusqu'à présent deux manières de représenter la notion intuitive de ligne dans \mathbb{R}^2 : les courbes paramétrées d'une part, les lignes de niveau d'autre part. Les résultats de cette partie vont nous convaincre que pour une large part, ces deux notions coïncident.

On considère une fonction f supposée dérivable sur son domaine de définition. On s'intéresse à l'équation

$$f(x_1, x_2) = 0, \quad (2.26)$$

et à l'ensemble de ses solutions, à savoir

$$\mathcal{C} = \{(x_1, x_2), f(x_1, x_2) = 0\}, \quad (2.27)$$

qui correspond à l'ensemble de niveau f^c pour $c = 0$. Comme nous l'avons vu, notre intuition nous amène à penser que \mathcal{C} est une courbe. Or nous avons jusqu'à présent représenté les courbes sous forme de paramétrage, et l'on peut se demander si il est possible de paramétriser localement \mathcal{C} .

Exemple 14. Nous avons déjà vu que le cercle \mathcal{S}^1 pouvait être paramétrisé par une application de $[0, 2\pi]$ à valeur dans \mathbb{R}^2 , à savoir

$$t \mapsto M(t) = (\cos t, \sin t),$$

mais on a aussi

$$\mathcal{S}^1 = \{(x_1, x_2), x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0\}$$

c'est à dire de la forme (2.27) avec $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1$.

Une question naturelle est donc la suivante :

Sous quelles conditions \mathcal{C} est-elle une courbe paramétrée ?

En fait, nous allons voir que, sous des hypothèses adéquates, on peut pour les éléments de \mathcal{C} exprimer localement une des variables, par exemple x_2 , en fonction de l'autre, ici x_1 de sorte que localement \mathcal{C} est un graphe.

Pour fixer les idées, commençons par regarder le cas où la fonction f est affine, c'est à dire supposons que l'équation a la forme

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + b = 0.$$

Si $a_2 \neq 0$, on obtient immédiatement x_2 connaissant x_1 à savoir

$$x_2 = -\frac{a_1 x_1 + b}{a_2}.$$

de sorte que l'ensemble des solutions de (2.26) est le graphe de la fonction φ de la variable x_1 donnée par

$$\varphi(x_1) = \frac{a_1 x_1 + b}{a_2},$$

et l'ensemble des solutions est donc une courbe paramétrique

$$\mathcal{C} = \{(x_1, \varphi(x_1), x_1 \in \mathbb{R}\}.$$

En revanche $a_2 = 0$, alors, on ne peut plus exprimer x_2 en fonction de x_1 . En revanche, on peut exprimer x_1 en fonction de x_2 si $a_1 \neq 0$, et dans ce cas là également on obtient aussi une courbe paramétrée. Le seul cas où on n'obtient pas de courbe est celui où

$$(a_1, a_2) = (0, 0)$$

cas, où en fonction de c on obtient soit l'ensemble vide, soit l'espace tout entier. Notons au passage que $(a_1, a_2) = \overrightarrow{\text{grad}} f$, qui est bien la quantité à étudier. On a en effet le résultat général suivant, que nous admettons :

Théorème 3. *Soit f une fonction qui admet des dérivées partielles sur son ensemble de définition, et soit $M = (m_1, m_2)$ solution de (2.26). Supposons que*

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(M) \neq 0. \quad (2.28)$$

Alors il existe un voisinage U de M dans \mathbb{R}^2 , un intervalle ouvert I contenant m_1 , une fonction $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que l'ensemble des solutions de (2.26) dans U soit exactement de la forme

$$(x_1, \varphi(x_1)), x_1 \in I.$$

Sous l'hypothèse (2.28), et près de M l'ensemble des solutions est donc un graphe, celui de la fonction φ . Si on a

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(M) \neq 0,$$

alors on peut changer le rôle de x_1 et x_2 et trouver une fonction ψ telle que $x_1 = \psi(x_2)$ près de M , et de nouveau la courbe est localement un graphe, donc paramétrée. Le seul cas où on ne peut conclure est celui où

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(M) = 0.$$

Le résultat précédent permet de calculer les vecteurs tangents aux solutions de (2.26). On a tout d'abord

Proposition 14. *Sous les hypothèses du Théorème 3 on a*

$$\varphi'(s) = -\frac{f'_{x_1}(s, \varphi(s))}{f'_{x_2}(s, \varphi(s))}.$$

Démonstration. On a pour $s \in I$, $f(s, \varphi(s)) = 0$. Posons pour $s \in I$, $\vec{n}(s) = (n_1(s), n_2(s))$ de sorte que la relation précédente s'écrit

$$f \circ \vec{n}(s) = 0, \forall s \in I,$$

d'où il résulte, en dérivant par rapport à s que

$$(f \circ \vec{n})'(s) = 0, \forall i \in I.$$

. On peut calculer cette dérivée grâce à la proposition 11 de sorte que

$$(f \circ \vec{n})'(s) = \vec{n}'(s) \cdot \overrightarrow{\text{grad}} f(\vec{n}(s)) = f'_{x_1}(s, \varphi(s)) + f'_{x_2}(s, \varphi(s))\varphi'(s) = 0.$$

La conclusion en découle. □

Ceci permet finalement d'établir

Théorème 4. *Soit M une solution de (2.26) telle que*

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(M) \neq 0. \quad (2.29)$$

Alors il existe un voisinage U de M telle que $M \cap U$ soit une courbe paramétrée. De plus, le vecteur

$$\overrightarrow{\text{grad}}^\perp f(M) = (-f'_{x_2}(M), f'_{x_1}(M)) \quad (2.30)$$

est alors tangent à la courbe $f(x_1, x_2) = 0$ en M .

Démonstration. Supposons pour commencer que $\frac{\partial f}{\partial x_2}(M) \neq 0$. Dans ce cas, l'ensemble des solutions est localement donné par le graphe $x_2 = \varphi(x_1)$, et il résulte alors de (2.3) que le vecteur

$$(1, \varphi'(M)) = \left(1, -\frac{f'_{x_1}(M)}{f'_{x_2}(M)}\right)$$

est tangent à ce graphe. En multipliant par $f'_{x_2}(M)$ on obtient la résultat.

Si $\frac{\partial f}{\partial x_2}(M) = 0$, alors nécessairement, comme le gradient ne s'annule pas en M , on doit avoir $\frac{\partial f}{\partial x_1}(M) \neq 0$, et on reprend le même raisonnement en échangeant les rôles de x_1 et x_2 .

Remarque 9. *On a*

$$\overrightarrow{\text{grad}}^\perp f(M) \cdot \overrightarrow{\text{grad}} f(M) = 0 \quad (2.31)$$

Exemple 15. Revenons au cas du cercle S^1 , avec $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1$. On a $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_2$, et donc, les deux seuls points où cette dérivée s'annule sont $(1, 0)$ et $(-1, 0)$. Si $x_2 > 0$, alors on peutécrire l'équation du cercle comme

$$x_2 = \sqrt{1 - x_1^2},$$

et on a donc

$$\varphi(x_1) = \sqrt{1 - x_1^2},$$

et de même si $x_2 < 0$, alors on a $\varphi(x_1) = -\sqrt{1 - x_1^2}$. un vecteur tangent à la courbe est donné par

$$\overrightarrow{\text{grad}}^\perp f(x_1, x_2) = (2x_2, 2x_1) = 2(-x_2, x_1).$$

Remarque 10. La condition (2.29) est une condition *suffisante* pour que \mathcal{C} soit localement près de M une courbe paramétrée, ce n'est cependant pas une condition *nécessaire*. Pour s'en convaincre, on peut remarquer que \mathcal{C} correspond également à l'ensemble de niveau de la fonction f^2 , à savoir

$$\mathcal{C} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, f^2(x_1, x_2) = 0\}.$$

Or on a pour tout $M \in \mathbb{R}^2$,

$$\overrightarrow{\text{grad}}f^2(M) = 2f(M)\overrightarrow{\text{grad}}f(M),$$

de sorte que

$$\overrightarrow{\text{grad}}f^2(M) = 0 \text{ pour } M \in \mathcal{C}.$$

Exercices

Exercice I

Soit f une fois deux fois dérivables de dérivées seconde continuës. On suppose que

$$\text{Hess } f(M) = 0, \text{ pour tout } M \in \mathbb{R}^2.$$

montrer que f est une fonction affine.

Exercice II

Soit f une fonction dérivable de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} et \vec{n} une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^2 telle que

$$\frac{d}{dt}\vec{n}(t) = -\overrightarrow{\text{grad}}f(\vec{n}(t)).$$

calculer $\frac{d}{dt}f(n(t))$.

Exercice III

Soit f une fonction dérivable sur \mathbb{R}^2 de dérivées continues. On suppose que

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + 2\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0.$$

On pose $u_1 = 2x_1 - x_2$, $u_2 = 2x_1 + x_2$, et $F(u_1, u_2) = f(x_1, x_2)$. Montrer que

$$\frac{\partial F}{\partial u_1} = 0.$$

en déduire qu'il existe une fonction d'une variable réelle g telle que

$$f(x_1, x_2) = g(2x_1 - x_2).$$

Exercice IV

A) Soit F une fonction sur \mathbb{R}^2 ayant des dérivées secondes continues. On suppose que

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = 0.$$

Montrer qu'il existe des fonctions f_1 et f_2 une variable réelle telles que

$$F(x_1, x_2) = f_1(x_1) + f_2(x_2).$$

B) Soit g une fonction définie sur \mathbb{R}^2 telle que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1} - \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_2} = 0.$$

On considère le changement de variable *linéaire* de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ défini par

$$(u_1, u_2) \mapsto (x_1, x_2) = \left(\frac{u_1 - u_2}{2}, \frac{u_1 + u_2}{2} \right),$$

et on pose $G(u_1, u_2) = g(x_1, x_2)$. Montrer que

$$\frac{\partial^2 G}{\partial u_1 \partial u_2} = 0.$$

C) En déduire qu'il existe des fonctions g_1 et g_2 telles

$$g(x_1, x_2) = g_1(x_1 - x_2) + g_2(x_1 + x_2).$$

Chapitre 3

Champs de vecteurs

3.1 Premières définitions

Soit \mathcal{D} un domaine de \mathbb{R}^2 .

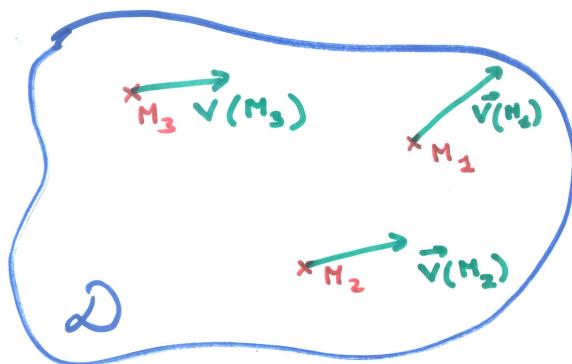
Définition 1. On appelle champ de vecteurs sur \mathcal{D} toute application \vec{V} d'un domaine \mathcal{D} de \mathbb{R}^2 à valeur dans \mathbb{R}^2 :

$$M \in \mathcal{D} \mapsto \vec{V}(M) = (V_1(M), V_2(M)),$$

où les fonctions V_1 et V_2 sont des applications scalaires sur \mathcal{D} , c'est à dire des applications de \mathcal{D} vers \mathbb{R} .

Nous avons déjà rencontré cette notion lors du chapitre précédent. En réalité, la terminologie relève en partie de la physique, où les applications de \mathcal{D} vers \mathbb{R} sont appelées par contraste *champs scalaires*.

Comme exemple de tels champs, considérons par exemple la carte d'une région, notée ici \mathcal{D} , et que l'on peut considérer comme un domaine de \mathbb{R}^2 . En chaque point de cette carte, nous pouvons par exemple considérer la température au sol : il s'agit alors d'une fonction T de \mathcal{D} à valeurs dans \mathbb{R} , c'est à dire un champ scalaire. En revanche, si à chaque point M de la carte, on associe la direction et la vitesse du vent, que l'on peut représenter par un vecteur $\vec{V}(M)$, alors on a défini un champ de vecteurs. On représente en général le vecteur $\vec{V}(M)$ sous forme de vecteur attaché au point M .



3.1.1 Changement de repère

Nous avons représenté jusqu'à présent les vecteurs de \mathbb{R}^2 dans la base canonique (\vec{e}_1, \vec{e}_2) . Que ce passe-t-il lorsque l'on désire exprimer les champs de vecteurs dans une nouvelle base (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2) ? les champs de Cette opération correspond tout simplement à l'opération usuelle de changement de coordonnées de vecteurs dans un changement de base que nous rappelons ici brièvement.

Soit ϵ la base initiale (\vec{e}_1, \vec{e}_2) de \mathbb{R}^2 , et considérons la nouvelle base ϵ' formée des vecteurs (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2) . Supposons que nous connaissons les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base dans la base initiale, c'est à dire supposons que nous connaissons des décomposition suivantes :

$$\begin{cases} \vec{e}'_1 = p_{1,1}\vec{e}_1 + p_{2,1}\vec{e}_2 \\ \vec{e}'_2 = p_{1,2}\vec{e}_1 + p_{2,2}\vec{e}_2 \end{cases}$$

Formons la matrice carrée $P(\epsilon \rightarrow \epsilon')$, appelée *matrice de passage* de la base ϵ vers la base ϵ'

$$P(\epsilon \rightarrow \epsilon') = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{2,2} \end{pmatrix}$$

Notons que la i -ème colonne de cette matrice est composée des coordonnées du vecteur \vec{e}'_i dans la base initiale ϵ . Considérons maintenant un vecteur \vec{X} de \mathbb{R}^2 , qui se décompose comme

$$\vec{X} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$$

dans la base initiale , et comme

$$\vec{X}' = x'_1\vec{e}'_1 + x'_2\vec{e}'_2.$$

Un bref calcul montre alors que

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix},$$

que l'on peut écrire, sous forme plus condensée, en posant

$${}^t X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ et } {}^t X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$$

sous la forme

$${}^t X = P(\epsilon \rightarrow \epsilon') {}^t X'. \quad (3.1)$$

La matrice de passage $P(\epsilon \rightarrow \epsilon')$ et la relation (3.1) permettent donc de calculer les coordonnées initiales lorsque l'on connaît les nouvelles coordonnées : en général, c'est plutôt l'inverse que l'on désire faire. Nous déduisons de (3.1) que

$${}^t X' = P^{-1}(\epsilon \rightarrow \epsilon') {}^t X, \quad (3.2)$$

et ainsi

$$P(\epsilon' \rightarrow \epsilon) = P^{-1}(\epsilon \rightarrow \epsilon').$$

On peut en effet vérifier que les matrices de passage d'une base à l'autre sont toujours inversibles. Ainsi si on veut calculer les nouvelles coordonnées en fonctions des coordonnées initiales, nous sommes amenés à calculer l'inverse de la matrice de passage $P^{-1}(\epsilon \rightarrow \epsilon')$.

Remarque 1. On peut également se demander comment se transforme le produit scalaire d'origine dans un changement de base, c'est à dire qu'elle est l'expression du produit scalaire dans le nouvelle base. Soient $\vec{X} = (x_1, x_2)$ et $\vec{Y} = (y_1, y_2)$ deux vecteurs de \mathbb{R}^2 et $\vec{X} \cdot \vec{Y} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2$ leur produit scalaire. Ce dernier peut s'écrire pour forme matricielle comme

$$\vec{X} \cdot \vec{Y} = X \cdot {}^t Y = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Si (x'_1, x'_2) et (y'_1, y'_2) sont les coordonnées dans la nouvelle base ϵ' alors

$$\vec{X} \cdot \vec{Y} = (x'_1, x'_2) {}^t P(\epsilon \rightarrow \epsilon') P(\epsilon \rightarrow \epsilon') \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix}.$$

Si la base ϵ' est elle-même orthonormée, alors la matrice P vérifie ${}^t P P = I$ et on a donc

$$\vec{X} \cdot \vec{Y} = x'_1 \cdot x'_2 + y'_1 \cdot y'_2.$$

L'expression du produit scalaire est donc la même dans toutes les bases orthonormées.

Remarque 2. Notons qu'un champ de vecteur est homogène à une longueur.

Remarque 3. Dans certains problèmes, on peut être amené à écrire à considérer des repères *mobile*, c'est à dire des bases orthonormées $\epsilon'(M)$ qui dépendent elle-même du point considéré M . C'est par exemple le cas lorsqu'on considère le repère mobile associé aux coordonnées polaires

$$\epsilon'(M) = (\vec{e}_r(M), \vec{e}_\theta(M))$$

où

$$\vec{e}_r(M) = \frac{M}{\|M\|}, \quad e_\theta(M) = \vec{e}_r^\perp(M).$$

Un exemple fondamental de champ de vecteur est fourni par les champs de gradient.

3.1.2 Champ de gradient

Définition 2. Soit f une application d'un domaine \mathcal{D} de \mathbb{R}^2 supposée dérivable en tout point du domaine. On appelle *champs de gradient* associé à f le champs de vecteurs $\overrightarrow{\text{grad}} f$ défini par

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(M) = (f'_{x_1}(M), f'_{x_2}(M)). \quad (3.3)$$

Nous avons déjà rencontré cette notion au chapitre précédent. La propriété suivante exprime le fait que le gradient est orthogonal aux lignes de niveau. Posons à cet effet, pour $c \in \mathbb{R}$

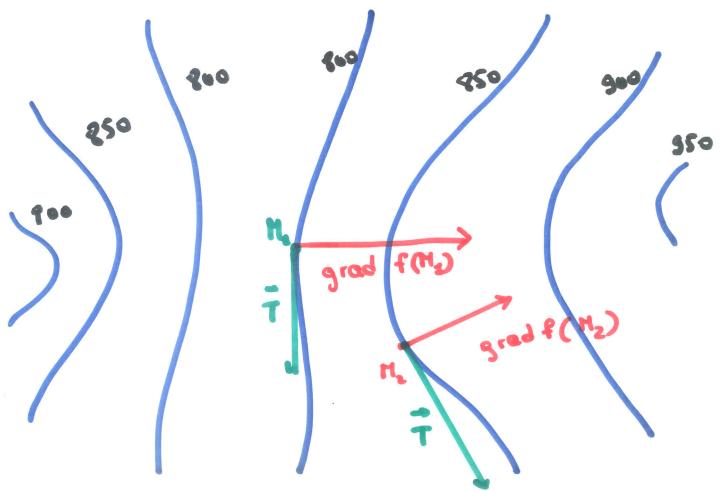
$$L^c = \{M \in \mathcal{D}, f(M) = c\}.$$

Proposition 1. Soit $c \in \mathbb{R}$ tel que L^c est non vide, et soit $M \in L^c$ tel que $\overrightarrow{\text{grad}} f(M) \neq 0$. Alors, pour tout vecteur \vec{T} tangent à L^c en M , on a

$$\vec{T} \perp \overrightarrow{\text{grad}} f(M).$$

Démonstration. la proposition est une conséquence immédiate du Théorème 4, et de la remarque qui le suit. \square

Remarque 4. Si on dessine les lignes de niveau pour des valeurs de c espacées régulièrement, alors le gradient est orthogonale aux lignes de niveau, pointe vers les ensembles de valeurs de niveau croissant, et son module est plus élevé aux endroits où ces courbes se resserrent.



Il est naturel de se demander si tout champ de vecteur peut se représenter sous forme de gradient d'une fonction, ce qui est le cas pour les fonctions d'une variable réelle, qui sont la dérivée de leur primitive. En réalité, il est facile de se convaincre que ce n'est pas le cas pour *tous* les champs de vecteurs, comme le montre le résultat suivant :

Proposition 2. Soit $\vec{V} = (V_1, V_2)$ un champ de vecteurs dérivable, de dérivée continue, défini sur un domaine \mathcal{D} . Une condition nécessaire pour que \vec{V} soit un champ de gradient est que

$$\frac{\partial V_2}{\partial x_1} = \frac{\partial V_1}{\partial x_2}. \quad (3.4)$$

Démonstration. Supposons qu'il existe une fonction f définie sur \mathcal{D} telle que

$$\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} f, \text{ c'est à dire } V_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \text{ et } V_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2}.$$

Par le Théorème de Schwarz, on doit avoir

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right),$$

ce qui même directement à (3.4). □

Nous verrons par la suite que, si le domaine est sans trou, alors la condition (3.4) est aussi une condition suffisante, c'est à dire tout champ de vecteurs qui vérifie (3.4) est un champ de gradient.

Exemple 1. Considérons tout d'abord un champ de vecteur constant $V(x_1, x_2) = (a_1, a_2)$, pour tout (x_1, x_2) dans \mathbb{R}^2 , où a_1 et a_2 sont deux constantes données. Alors on a $V'_{x_1}(x_1, x_2) = 0$ et $V'_{x_2}(x_1, x_2) = 0$ de sorte que (3.4) est satisfaite. On peut par ailleurs vérifier que V est le champ de gradient de la fonction linéaire

$$f(x_1, x_2) = a_1 x_1 + a_2 x_2, \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

de sorte que tout champ de vecteur constant est bien un champ de gradient.

Exemple 2. Considérons un champ de vecteur \vec{V} linéaire, c'est à dire de la forme

$${}^t\vec{V}(\vec{X}) = A \cdot {}^t\vec{X},$$

où A est une matrice 2

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

On vérifie que $V_1(x_1, x_2) = a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2$, $V_2(x_1, x_2) = a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2$,

$$\frac{\partial V_2}{\partial x_1} = a_{2,1},$$

et que

$$\frac{\partial V_1}{\partial x_2} = a_{1,2}.$$

Le champ V est donc un champ de gradient si et seulement $a_{1,2} = a_{2,1}$, c'est à dire si et seulement si la matrice A est symétrique.

Remarque 5. pour une fonction f donnée, nous avons introduit au chapitre précédent le champ de vecteurs

$$\overrightarrow{\text{grad}}^\perp f = \left(-\frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_1} \right),$$

qui correspond au champ gradient auquel on a fait subir une rotation de $\pi/2$ dans le plan. Pour un tel champ de vecteurs, la condition (3.4) s'écrit

$$-\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) = -\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)$$

c'est à dire

$$\Delta f = 0, \quad (3.5)$$

où Δ désigne l'opérateur Laplacien, qui s'écrit

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_2}.$$

Par exemple, si on prend la fonction $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, alors

$$\Delta f(M) = 2,$$

et $\overrightarrow{\text{grad}}^\perp f(M) = (2m_2, -2m_1)$ n'est donc pas un champ de gradient.

Invariance du gradient par changement de repère orthonormé.

La question de l'invariance par changement de repère est une question centrale, tant en mathématique que dans les domaines applicatifs. Nous avons vu qu'un gradient est un champ de vecteur, à ce titre il se transforme dans un changement de base par les règles de l'algèbre linéaire, voir le paragraphe 3.1.1. Que devient alors dans le nouveau repère la définition (3.3) ?

La définition (3.3) associé en effet à une fonction f sur \mathbb{R}^2 le champ de vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}f$: cette définition repose sur l'expression dans un repère donné de la fonction f et de ses dérivées partielles,

elle donc a priori relative à un choix de repère orthonormé (\vec{e}_1, \vec{e}_2) , qui détermine les coordonnées cartésiennes (x_1, x_2) . Elle s'exprime donc, pour une fonction f donnée sur un domaine \mathcal{D} par la relation

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \vec{e}_2.$$

Introduit un nouveau repère orthonormé (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2) et des coordonnées x'_1, x'_2 correspondantes de sorte que

$$x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 = x'_1 \vec{e}'_1 + x'_2 \vec{e}'_2$$

Cherchons l'expression du gradient dans cette nouvelle base. Posons

$$\tilde{f}(x'_1, x'_2) = f(x_1, x_2) = f(x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2) = f(x'_1 \vec{e}'_1 + x'_2 \vec{e}'_2).$$

Proposition 3. *On a pour tout $(x_1, x_2) \in \mathcal{D}$*

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(x_1, x_2) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x'_1} \vec{e}'_1 + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x'_2} \vec{e}'_2,$$

ses coordonnées dans la base (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2) sont donc $\tilde{f}'_{x'_1}$ et $\tilde{f}'_{x'_2}$.

L'expression du gradient dans la nouvelle base est donc identique à celle dans l'ancienne base.

Preuve. On a $\tilde{f} = f \circ \Phi$ où Φ désigne l'application de \mathbb{R}^2 dans lui-même qui aux nouvelles coordonnées associe les anciennes $(x'_1, x'_2) \mapsto \Phi(x'_1, x'_2) = (x_1, x_2)$. Il s'agit d'une application linéaire, associe à une matrice P carrée 2×2 . Posons $\vec{X} = (x_1, x_2)$ et $\vec{X}' = (x'_1, x'_2)$. On a

$${}^t \vec{X} = \Phi(\vec{X}') = P {}^t X',$$

où A désigne la matrice de passage de la nouvelle base vers l'ancienne. Comme Φ est linéaire, on a $D_\Phi = P$, et donc par la formule (2.10)

$$\overrightarrow{\text{grad}} \tilde{f}(x'_1, x'_2) = \overrightarrow{\text{grad}} f(x_1, x_2) \circ P$$

Comme A est *orthonormée*, on a $P^{-1} = {}^t P$, et donc $\overrightarrow{\text{grad}} f(x_1, x_2) = \overrightarrow{\text{grad}} \tilde{f}(x'_1, x'_2) \circ {}^t P$, soit, en transposant

$${}^t \overrightarrow{\text{grad}} f(x_1, x_2) = P \circ {}^t \overrightarrow{\text{grad}} \tilde{f}(x'_1, x'_2).$$

Ceci montre que les coordonnées du gradient se transforment comme celles des vecteurs, et donne la relation désirée. \square

Remarque 6. Attention, l'énoncé n'est valable que pour des changements de bases *orthonormées*.

Remarque 7. La proposition 3 peut aussi s'interpréter en revenant à la formule du développement limité (2.8)

$$f(M + \vec{h}) - f(M) \simeq \vec{h} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} f(M).$$

la conservation du produit scalaire par *changement de repère orthonormé* comme celle du membre de gauche explique alors que la forme du gradient reste elle-même inchangée.

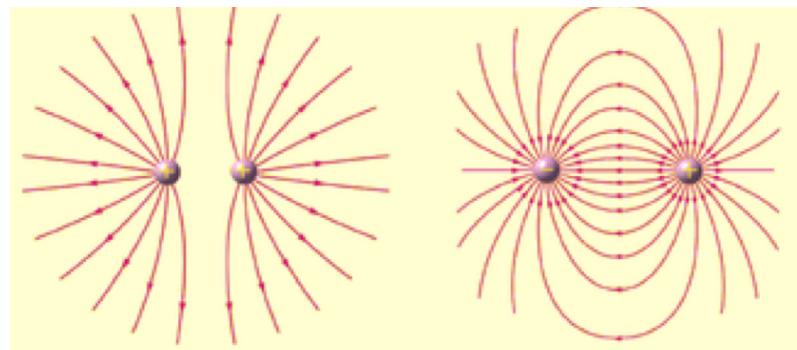


FIGURE 3.1 – Champ électrique généré par des charges de même signe et de signes opposés.

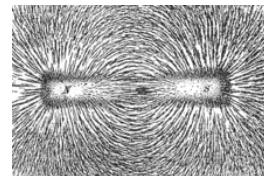


FIGURE 3.2 – la limaille de fer dessine des lignes de champ magnétique.

3.1.3 Lignes de champ

Considérons un champ de vecteurs \vec{V} défini sur un domaine \mathcal{D} , et \mathcal{C} une courbe tracée dans le domaine \mathcal{D} .

Définition 3. On dira que \mathcal{C} est une *ligne de champ* du champ de vecteurs \vec{V} si et seulement si \vec{V} est tangent à \mathcal{C} en tout point de \mathcal{C} .

Les lignes de champ sont souvent utilisées en physique pour représenter des champs de vecteurs, par exemple des champs électriques ou magnétiques, comme dans la figure ci-dessous, qui représente le champ électrique créé par des charges ponctuelles de même signe puis de signe opposé. Notons par ailleurs que le champ électrique est un *champ gradient*, associé à l'opposé du potentiel électrique.

En mathématiques, se pose bien entendu le problème de *l'existence* de telles lignes de champs.

Proposition 4. Soit \vec{V} un champ de vecteurs dérivable de dérivées continues sur un domaine \mathcal{D} , et soit M_0 un point de \mathcal{D} . Alors il existe une ligne de champ \mathcal{C} et une seule qui passe par M_0 .

Idée de la démonstration. Pour construire la ligne de champ, on introduit l'équation différentielle avec condition initiale

$$\begin{cases} \frac{dM}{dt}(t) = \vec{V}(M(t)), & t \in I \\ M(0) = M_0, \end{cases} \quad (3.6)$$

où I désigne un intervalle de \mathbb{R} contenant 0, et où l'inconnue est la fonction $t \mapsto M(t) \in \mathcal{D}$. Notons que l'équation (3.6) est en fait un système de deux équations différentielles lorsqu'on l'exprime en coordonnées.

Les méthodes de résolution des équations différentielles, et en particulier le Théorème de Cauchy-Lipschitz montrent alors que l'équation (3.6) possède toujours une solution, qui existe tant que $M(t)$ ne sort pas d'un voisinage de M_0 . La fonction $t \mapsto M(t) \in \mathcal{D}$ fournit alors le paramétrage d'une courbe \mathcal{C} , dont un vecteur tangent n'en autre que $\frac{dM}{dt}(t)$ en $M(t)$ c'est à dire, au vu de (3.6), le vecteur $\vec{V}(M(t))$. \square

Remarque 8. En mathématiques, on utilise souvent le terme *courbes intégrales* du champ de vecteurs \vec{V} pour désigner les lignes de champ. Ceci fait références à l'intégration de l'équation différentielle (3.6).

Remarque 9. L'équation (3.6) modélise de nombreux phénomènes, en particulier en mécanique des fluides, comme nous allons le voir.

Considérons un fluide, qui pourra être un liquide comme l'eau ou un gaz, comme l'air occupant un domaine \mathcal{D} (ici de \mathbb{R}^2). Supposons que le champ de vecteurs \vec{V} représente le champ des vitesses du fluide, c'est à dire qu'en chaque point M du domaine, $\vec{V}(M)$ désigne la vitesse des particules élémentaires, par exemple les molécules, constituant ce fluide. Alors les lignes de champ ou *courbes intégrales* de \vec{V} correspondent aux trajectoires suivies par les particules élémentaires : plus précisément, les particules présentes au temps 0 en M_0 seront transportées par le fluide au point $M(t)$ au temps t . La donnée du champ de vecteurs \vec{V} permet donc de reconstituer entièrement les trajectoires des particules du fluide.

En guise d'exercice, voyons maintenant comment les quantités physiques sont transportées par le champ de vecteurs. Soit f une quantité *scalaire* physique que l'on peut mesurer dans le fluide : $f(M, t)$ représente donc la quantité mesurée au point M , au temps t . La température du fluide peut être un exemple d'une telle quantité. Considérons une particule située au temps $t = 0$ en M_0 et essayons de voir comment varie la quantité f mesurée sur la particule : nous noterons \tilde{f} cette quantité qui dépend uniquement du temps.

On a par définition

$$\tilde{f}(t) = f(M(t), t)$$

et donc

$$\frac{d\tilde{f}}{dt}(t) = \frac{d}{dt}f(M(t), t).$$

Si on applique donc la règle de dérivation des fonctions composées, il vient, si $\overrightarrow{\text{grad}}_M$ désigne uniquement les dérivées par rapport aux variables spatiales

$$\frac{d\tilde{f}}{dt}(t) = \frac{dM}{dt}(t) \cdot \overrightarrow{\text{grad}}_M f(M(t), t) + \frac{\partial f}{\partial t}(M(t), t),$$

soit finalement

$$\frac{d\tilde{f}}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(M(t), t) + \vec{V}(M(t)) \cdot \overrightarrow{\text{grad}}_M f(M(t), t). \quad (3.7)$$

On parle alors de *dérivée particulière*.

3.2 Circulation d'un champ de vecteurs

Soit \vec{V} un champ de vecteurs dérivable, de dérivées continues. On considère ici une courbe paramétrée $t \mapsto \vec{M}(t)$ par un segment fermé $[a, b]$

$$x_1 = M_1(t) \quad x_2 = M_2(t), \quad \text{où } t \in [a, b].$$

Les extrémités de cette courbes sont notées $A = (M_1(a), M_2(a))$, $B = (M_1(b), M_2(b))$, et la courbe elle-même sera notée \widehat{AB} . Notons que l'on considère ici des courbes *orientées*, c'est à dire avec une direction allant de A vers B ¹. On introduit alors la quantité suivante :

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b \vec{V}(M(t)) \cdot \vec{M}'(t) dt \\ &= \int_a^b [V_1(M(t))M'_1(t) + V_2(M(t))M'_2(t)] dt \end{aligned}$$

Proposition 5. *La valeur de l'intégrale I ne dépend pas du paramétrage choisi de la courbe \widehat{AB} , s'il respecte l'orientation. On la note*

$$\int_{\widehat{AB}} \vec{V}(M) d\vec{M}, \tag{3.8}$$

et on l'appelle circulation du champs de vecteurs \vec{V} le long de la courbe \widehat{AB} .

Démonstration. Considérons un autre paramétrage de la courbe : on peut l'obtenir en considérons un intervalle $[c, d]$, et une application $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ dérivable telle que $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$, de sorte que

$$s \mapsto N(s) \equiv \vec{M}(\varphi(s))$$

fournit bien le paramétrage désiré. On a

$$\begin{aligned} \int_c^d \vec{V}(N(s)) \cdot \vec{N}'(s) ds &= \int_c^d \vec{V}(M(\varphi(s))) \cdot \vec{M}'(\varphi(s)) \varphi'(s) ds \\ &= \int_a^b \vec{V}(M(t)) \cdot \vec{M}'(t) dt \end{aligned} \tag{3.9}$$

où on a utilisé la formule de changement de variable pour la dernière égalité. \square

Remarque 10. Dans la notation (3.8) on a écrit implicitement $d\vec{M} = \vec{M}'(t)dt$, où $M'(t) = (M'_1(t), M'_2(t))$.

Passons maintenant en revue, sans démonstration, quelques propriétés utiles.

Proposition 6. *On a, si \vec{V} est un champ de vecteurs et \widehat{AB} une courbe paramétrée*

- Si C est un point sur la courbe \widehat{AB} on a

$$\int_{\widehat{AB}} \vec{V}(M) d\vec{M} = \int_{\widehat{AC}} \vec{V}(M) d\vec{M} + \int_{\widehat{CB}} \vec{V}(M) d\vec{M}.$$

1. on ne considère pour simplifier que des paramétrages monotones, c'est à dire qui forment une bijection de l'intervalle $[a, b]$ vers \widehat{AB} et tels que la dérivée ne s'annule pas

– si $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_{\widehat{AB}} \lambda \vec{V}(M) d\vec{M} = \lambda \int_{\widehat{AB}} \vec{V}(M) d\vec{M}.$$

et si \vec{V}_1 et V_2 sont deux champs de vecteurs

$$\int_{\widehat{AB}} (\vec{V}_1(M) + V_2(M)) d\vec{M} = \int_{\widehat{AB}} \vec{V}_1(M) d\vec{M} + \int_{\widehat{AB}} \vec{V}_2(M) d\vec{M}$$

Par ailleurs, si $t \mapsto M(t)$ est un paramétrage de la courbe \widehat{AB} , alors l'application $t \mapsto M(b+a-t)$ est un paramétrage de la courbe orientée \widehat{BA} et on a

$$\int_{\widehat{AB}} \vec{V}(M) d\vec{M} = - \int_{\widehat{BA}} \vec{V}(M) d\vec{M}.$$

3.2.1 Circulation d'un champ de gradient

Considérons le cas particulier où $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} f$ est un champ de gradient. On a alors

Proposition 7. Soit f une fonction dérivable, de dérivées continues, et \widehat{AB} une courbe orientée. On a

$$\int_{\widehat{AB}} \overrightarrow{\text{grad}} f(M) d\vec{M} = f(B) - f(A).$$

En particulier, la valeur de la circulation d'un champ de gradient ne dépend que des extrémités, et pas du chemin suivi.

Démonstration; On a

$$\int_{\widehat{AB}} \overrightarrow{\text{grad}} f(M) d\vec{M} = \int_a^b \overrightarrow{\text{grad}} f(M(t)) \cdot \vec{M}'(t) dt.$$

Or, par la formule de dérivation des fonctions composées, il vient

$$\frac{d}{dt} f(M(t)) = \overrightarrow{\text{grad}} f(M(t)) \cdot \vec{M}'(t).$$

Il en résulte que

$$\int_{\widehat{AB}} \overrightarrow{\text{grad}} f(M) d\vec{M} = \int_a^b \frac{d}{dt} f(M(t)) dt = f(M(b)) - f(M(a)) = f(B) - f(A).$$

□

Il résulte de la proposition précédente que si \mathcal{C} est une courbe fermée, qui correspond au cas $A = B$, alors la circulation d'un champ de gradient est nulle

$$\int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{\text{grad}} f(M) d\vec{M} = 0.$$

On dit parfois, surtout dans le langage physique, qu'un champ de gradient est à *circulation conservative*.

Définition 4. Un champ de vecteurs est dit à circulation conservative si sa circulation le long de toute courbe fermée est nulle.

En fait, il s'avère que les champs à circulation conservative sont *exactement* les champs de gradient. Pour le démontrer on vérifie successivement les propriétés suivantes :

Proposition 8. Soit A et B deux points du domaine supposé connexe. La circulation d'un champ de vecteurs \vec{V} à circulation conservative le long d'une courbe allant de A vers B ne dépend pas de la courbe choisie, elle ne dépend que des extrémités.

Démonstration. Soit \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 deux courbes paramétrées reliant A et B . Notons \mathcal{C}_3 la courbe d'orientation inversée de \mathcal{C}_2 . La réunion $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_3$ forme donc une courbe fermée et orientée, de sorte que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathcal{C}} \vec{V}(M) d\vec{M} = \int_{\mathcal{C}_1} \vec{V}(M) d\vec{M} + \int_{\mathcal{C}_3} \vec{V}(M) d\vec{M} \\ &= \int_{\mathcal{C}_1} \vec{V}(M) d\vec{M} - \int_{\mathcal{C}_2} \vec{V}(M) d\vec{M}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

□.

Prenons maintenant un point de référence quelconque O dans le domaine et posons, pour $x \in \mathcal{D}$

$$f(X) = \int_{\widehat{OX}} \vec{V}(M) d\vec{M}, \quad (3.11)$$

où \widehat{OX} désigne une courbe orientée quelconque reliant O et X (nous venons de voir que le résultat est indépendant du choix de la courbe).

Proposition 9. Soit V un champ de vecteurs à circulation conservative sur un domaine \mathcal{D} . Alors V est un champ de gradient, car

$$\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} f,$$

où la fonction f est donnée par la formule (3.11).

Démonstration. Soit X un point quelconque dans D . Soit \vec{e}_1 le vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^2 défini par $\vec{e}_1 = (1, 0)$. Pour $h \in \mathbb{R}$ petit, considérons le point $X_h = x + h\vec{e}_1$ et le segment $[X, X_h]$, qui peut-être paramétré par

$$s \mapsto X + s\vec{e}_1, \quad s \in [0, h].$$

Si \widehat{OX} est une courbe quelconque reliant O à X , alors $\widehat{OX} \cup [X, X_h]$ est une courbe orientée reliant O à X_h et

$$\begin{aligned} f(X_h) &= \int_{\widehat{OX} \cup [X, X_h]} \vec{V}(M) d\vec{M} = f(X) + \int_{[X, X_h]} \vec{V}(M) d\vec{M} \\ &= f(X) + \int_0^h V_1(X + s\vec{e}_1) ds \end{aligned} \quad (3.12)$$

On a donc

$$\frac{f(X + h\vec{e}_1) - f(X)}{h} = \frac{1}{h} \int_0^h V_1(X + s\vec{e}_1) ds \rightarrow V_1(X) \text{ lorsque } h \rightarrow 0,$$

d'où il résulte que

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = V_1(X).$$

On démontre de même que

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = V_2(X),$$

ce qui termine la preuve.

Remarque 11. Si on a

$$\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} f, \quad (3.13)$$

alors pour toute constante $c \in R$ on a aussi

$$\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}(f + c),$$

de sorte qu'il n'y a pas unicité de la fonction f qui vérifie (3.13). Par ailleurs, on vérifie, au vu du résultat de la Proposition 9, que *toutes les solutions* de l'équation (3.13) ont la forme $f + c$, $c \in \mathbb{R}$.

3.3 Le formalisme des formes différentielles

3.3.1 Formes linéaires

La notion de forme linéaire est une notion de base de l'algèbre linéaire. Considérons de manière générale l'espace vectoriel \mathbb{R}^n , où $n \in \mathbb{N}^*$ est donné. Rappelons qu'une base (dite canonique) de \mathbb{R}^n est donnée par la famille (e_1, \dots, e_n) , où $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0, \dots, 0)$, ..., $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$.

Définition 5. On appelle forme linéaire sur \mathbb{R}^n toute application linéaire L de \mathbb{R}^n vers \mathbb{R} .

On notera par la suite

$$\langle L, u \rangle$$

l'image d'un vecteur u de \mathbb{R}^n par l'application linéaire L , de sorte que la linéarité s'exprime par la condition

$$\langle L, \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \rangle = \lambda_1 \langle L, u_1 \rangle + \lambda_2 \langle L, u_2 \rangle,$$

pour tous vecteurs u_1, u_2 dans \mathbb{R}^n , et tous nombres λ_1, λ_2 .

Exemple 3. Un exemple fondamental de forme linéaire est fourni par les *forme coordonnées* e_k^* pour $k = 1, \dots, n$. Ces dernières sont définies, par les relations

$$\langle e_k^*, e_m \rangle = 0, \text{ si } k \neq m \text{ et } \langle e_k^*, e_k \rangle = 1,$$

ou encore pour $x = (x_1, \dots, x_n)$

$$\langle e_k^*, x \rangle = x_k.$$

Par ailleurs, si v est un vecteur donné de \mathbb{R}^n on peut lui associer de manière naturelle la forme linéaire L_v définie par

$$\langle L_v, u \rangle = u \cdot v, \text{ pour tout } u \in \mathbb{R}^n.$$

On pourra vérifier que

$$e_k^* = L_{e_k}.$$

Proposition 10. L'ensemble des formes linéaires sur \mathbb{R}^n forme un espace vectoriel noté $(\mathbb{R}^n)^*$ de dimension n , et appelé le dual de \mathbb{R}^n . Une base de $(\mathbb{R}^n)^*$ est fournie par la famille $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$.

Dans le contexte qui suit, on utilisera souvent la notation

$$dx_k = e_k^*.$$

3.3.2 Forme différentielles de degré 1

Soit \mathcal{D} un domaine de \mathbb{R}^2 . Les formes différentielles de degré 1 sont des formes linéaires dont les coefficients varient en fonction du point.

Définition 6. On appelle forme différentielle (de degré 1) définie sur \mathcal{D} une application de \mathcal{D} dans l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^2)^*$.

Soit ω une forme linéaire sur \mathcal{D} . En exprimant les formes linéaires dans la base $(e_1^*, e_2^*) = (dx_1, dx_2)$, on peut donc écrire

$$\omega(M) = f_1(M)dx_1 + f_2(M)dx_2,$$

ou si on préfère

$$\omega(x_1, x_2) = f_1(x_1, x_2)dx_1 + f_2(x_1, x_2)dx_2, \quad (3.14)$$

où f_1 et f_2 sont deux fonctions définies sur \mathcal{D} .

Exemple 4. Un exemple intéressant de forme différentielle de degré 1 est fourni par la différentielle d'une fonction. Si f est une fonction dérivable sur \mathcal{D} , alors sa différentielle df est la forme différentielle notée df définie par

$$df(M) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(M)dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(M)dx_2.$$

Définition 7. On dit d'une forme différentielle ω de degré 1 qu'elle est exacte, si et seulement si il existe une fonction f telle que

$$\omega = df.$$

On peut définir une correspondance entre forme différentielles et champs de vecteurs. A la forme ω définie en (3.14), on peut associer de manière biunivoque le champ de vecteurs $\vec{V}(M) = (f_1(M), f_2(M))$. Dans cette correspondance, les champs de gradients correspondent aux formes exactes. En particulier une condition nécessaire pour qu'une forme différentielle

$$\omega = f_1dx_1 + f_2dx_2$$

soit exacte est que

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2}.$$

3.3.3 Intégrale curvilligne

Soit \widehat{AB} une courbe orientée dans \mathcal{D} , et soit ω une forme différentielle de degré 1 définie sur \mathcal{D} . Si $T \mapsto M(t) = (m_1(t), m_2(t))$ est une paramétrisation de \widehat{AB} sur un intervalle $I = [a, b]$, on considère

$$I = \int_a^b \langle \omega(x), M'(t) \rangle dt = \int_a^b [f_1(M(t))m'_1(t) + f_2(M(t))m'_2(t)] dt.$$

On vérifie alors

Proposition 11. *L'intégrale I ne dépend pas du paramétrage. Elle est appelée intégrale curviligne de la forme ω le long de la courbe \overline{AB} . On la note*

$$\int_{\overline{AB}} \omega \text{ ou } \int_{\overline{AB}} f_1 dx_1 + f_2 dx_2.$$

On a de plus

$$\int_{\overline{AB}} \omega = \int_{\overline{AB}} \vec{V}(M) d\vec{M},$$

où le champ de vecteurs \vec{V} est défini par

$$\vec{V}(M) = (f_1(M), f_2(M)).$$

On montre par ailleurs que

$$\int_{\overline{AB}} df = f(B) - f(A).$$

Remarque 12. Le formalisme des formes différentielles est particulièrement agréable pour faire des calculs : en effet si la courbe est donnée de manière paramétrée $x_1 = M_1(t)$, $x_2 = M_2(t)$, alors on écrit sur la courbe au $M(t)$ $dM_1 = M'_1(t)dt$, $dM_2 = M'_2(t)dt$ de sorte que

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \omega &= \int_a^b f_1(M(t))dM_1(t) + f_2(M(t))dM_2(t) \\ &= \int_a^b [f_1(M(t))M'_1(t) + f_2(M(t))M'_2(t)] dt. \end{aligned}$$

Exemple 5. On considère la courbe \mathcal{C} d'équation

$$x_1^2 + x_2^2 - 2x_2 = 0,$$

orientée dans le sens trigonométrique positif. On désire calculer l'intégrale curviligne

$$\int_{\mathcal{C}} x_1 x_2^2 dx_2 - x_2 x_1^2 dx_1.$$

La première étape du calcul consiste à trouver un paramétrage de \mathcal{C} : tout d'abord en écrivant l'équation comme

$$x_1^2 + (x_2 - 1)^2 = 1,$$

on reconnaît l'équation du cercle de centre $(0, 1)$ et de rayon 1, de sorte qu'un paramétrage nous est fourni par

$$x_1 = \cos t, \quad x_2 = 1 + \sin t \quad t \in [0, 2\pi].$$

On a donc

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \cos t (1 + \sin t)^2 d(1 + \sin t) - (1 + \sin t) \cos^2 t d(\cos t) \\ &= \int_0^{2\pi} [(1 + \sin t)^2 \cos^2 t + (1 + \sin t) \cos^2 t \sin t] dt \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2 t [1 + 3 \sin t + 2 \sin^2 t] dt \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt + 3 \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin t dt + 2 \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t dt. \end{aligned}$$

On utilise ensuite les formules de trigonométrie classiques

$$\cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t), \quad \text{et} \quad \sin t \cos t = \frac{1}{2} \sin 2t$$

de sorte que

$$(\sin t \cos t)^2 = \frac{1}{4} \sin^2 t = \frac{1}{8}(1 - \cos 4t),$$

où on a utilisé également la relation $1 - \cos 2\theta = 2 \sin^2 \theta$. Par ailleurs, comme la fonction $t \mapsto \cos^2 t \sin t$ est impaire, 2π périodique, son intégrale sur une période est nulle. On a donc

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2t) dt + \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 4t) dt = \frac{3\pi}{2}.$$

Exercices

Exercice I

Soit \vec{A} un vecteur de \mathbb{R}^2 , et \vec{V} le champ de vecteur constant défini pour tout $M \in \mathbb{R}^2$ par

$$\vec{V}(M) = \vec{A}.$$

- 1) Soit \mathcal{C} une courbe fermée de \mathbb{R}^2 . Montrer que la circulation de V le long de \mathcal{C} est nulle.
- 2) En déduire qu'il existe une fonction f telle que $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} f$.
- 3) Calculer f .

Chapitre 4

Intégrales doubles

4.1 Construction de l'intégrale double

Considérons un domaine \mathcal{D} de \mathbb{R}^2 , limité par une courbe régulière \mathcal{C} . Soit f une fonction continue définie sur \mathcal{D} . On divise le plan \mathbb{R}^2 en petits rectangles de taille $\Delta x_1 \times \Delta x_2$ parallèles aux axes Ox_1 et Ox_2 de la manière suivante.

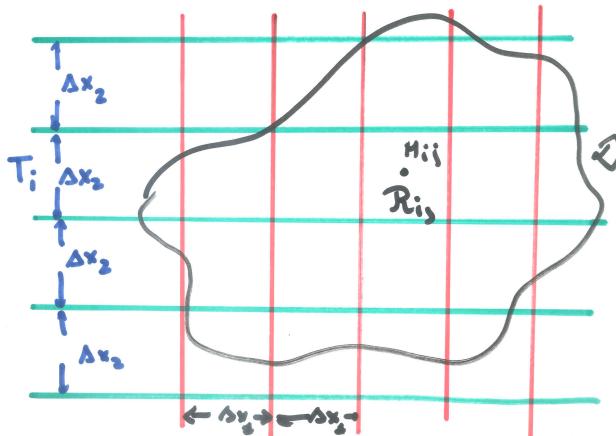
On découpe d'abord \mathbb{R}^2 en plusieurs tranches T_i de longueur de hauteur Δx_2 grâce à des droites parallèles à l'axe Ox_1 . Ensuite, on découpe chaque tranche par des droites parallèles à l'axe Ox_2 , ce qui forme les rectangles que nous avons mentionnés plus haut. Nous ne garderons que les rectangles $R_{i,j}$ qui sont contenus dans le domaine \mathcal{D} . Notons $M_{i,j}$ le centre du rectangle $R_{i,j}$. On pondère l'aire $\Delta x_1 \times \Delta x_2$ du rectangle $R_{i,j}$ par le *poids* $f(M_{i,j})$ et on fait la somme sur tous les rectangles inclus dans le domaine \mathcal{D} , à savoir

$$\sum \sum f(M_{i,j}) \Delta x_1 \Delta x_2. \quad (4.1)$$

Notons que si $f = 1$ alors on obtient ainsi l'aire de la réunion des rectangles $R_{i,j}$ inclus dans \mathcal{D} , aire qui tend, lorsque Δx_1 et Δx_2 tendent vers 0, vers l'aire de \mathcal{D} . Dans le cas général on montre :

lorsque Δx_1 et Δx_2 tendent vers 0, la somme ci-dessus converge vers une quantité que nous noterons

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$



Définition 1. On appelle I l'intégrale double de la fonction f sur le domaine \mathcal{D} .

Interprétation. Nous avons déjà vu que lorsque f est identiquement égale à 1, alors l'intégrale double donne l'aire de \mathcal{D} , c'est à dire

$$\text{Aire de } \mathcal{D} = \iint_{\mathcal{D}} 1 dx_1 dx_2 = \iint_{\mathcal{D}} dx_1 dx_2.$$

Dans le cas général, on trouve donc une aire pondérée. Par exemple, si \mathcal{D} représente un objet ayant la forme d'une plaque, de densité variable f , I représente son poids totale.

Par ailleurs, de même que nous avions vu que l'intégrale d'une fonction d'une variable réelle permettait de calcul l'aire située sous le graphe, l'intégrale double d'une fonction f représente le volume situé sous le graphe de cette fonction f . Supposons pour simplifier que f est positive et notons \mathcal{S} le graphe de f au dessus de \mathcal{D} . Cette surface et les parallèles à Ox_3 menées par les points du contour \mathcal{C} limite un domaine V de \mathbb{R}^3 . L'intégrale I fournit alors la mesure de ce domaine V . En effet, le volume limité dans V par le rectangle $R_{i,j}$ et les plans parallèles à Ox_3 qui s'appuient sur son périmètre a pour valeur approchée

$$f(M_{i,j}) \Delta x_1 \Delta x_2.$$

La somme

$$\sum \sum f(M_{i,j}) \Delta x_1 \Delta x_2$$

représente donc une valeur approchée du volume de V . La limite I est donc le volume exacte.

Voici quelques propriétés élémentaires :

Proposition 1. Soit \mathcal{D} un domaine donné de \mathbb{R}^2 . Si f est une fonction continue sur \mathcal{D} , $\lambda \in \mathbb{R}$ alors on a

$$\iint_{\mathcal{D}} \lambda f(x_2, x_1) dx_1 dx_2 = \lambda \iint_{\mathcal{D}} f(x_2, x_1) dx_1 dx_2,$$

et si f_1 et f_2 sont deux fonctions continues sur \mathcal{D} , alors

$$\iint_{\mathcal{D}} (f_1 + f_2) f(x_2, x_1) dx_1 dx_2 = \iint_{\mathcal{D}} f_1(x_2, x_1) dx_1 dx_2 + \iint_{\mathcal{D}} f_2(x_2, x_1) dx_1 dx_2.$$

Si l'on divise le domaine \mathcal{D} en deux domaines \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 , alors

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x_2, x_1) dx_1 dx_2 = \iint_{\mathcal{D}_1} f(x_2, x_1) dx_1 dx_2 + \iint_{\mathcal{D}_2} f(x_2, x_1) dx_1 dx_2.$$

Ces propriétés se démontrent en établissant des propriétés similaires pour les approximations des intégrales doubles données par les sommes (4.1).

4.2 Le Théorème de Fubini

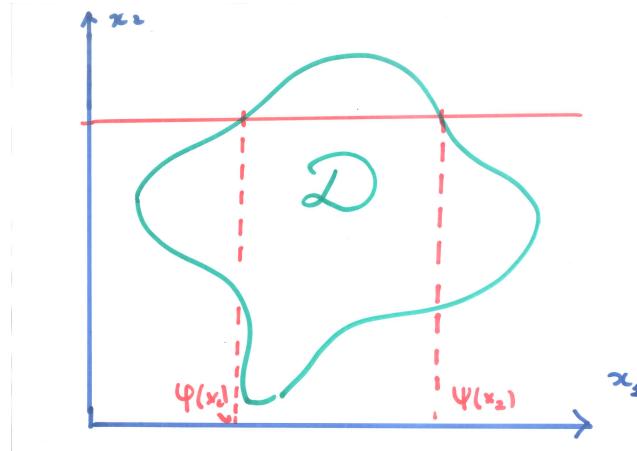
Le théorème de Fubini permet de ramener des calculs d'intégrales *doubles* à des intégrales simples.

Soit un domaine \mathcal{D} sur lequel on désire intégrer une fonction. Lorsque l'on considère les points de \mathcal{D} , fixe une des variables, par exemple x_2 , alors l'autre variable varie sur des réunions

d'intervalles : pour simplifier, nous allons considérer le cas où x_1 varie dans un seul intervalle $[\varphi(x_2), \psi(x_2)]$ dont les bornes sont des fonctions de x_2 . On suppose par ailleurs que si x_2 prend des valeurs au delà de deux nombres $c < d$, alors l'intervalle est vide. En terme plus mathématiques, ceci signifie que la projection orthogonale de \mathcal{D} sur l'axe Ox_2 est égale à l'intervalle $[c, d]$ et que

$$\mathcal{D} \cap \{x_2 = m_2\} = \{(x_1, m_2), x_1 \in [\varphi(m_2), \psi(m_2)]\}.$$

pour tout $m_2 \in [c, d]$.



On a alors

Théorème 1. *On a l'identité*

$$\iint f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_c^d \left(\int_{\varphi(x_2)}^{\psi(x_2)} f(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2.$$

Remarque 1. La quantité entre parenthèses dans le membre de droite est bien une fonction qui ne dépend que de la variable x_2 par l'intermédiaire de f et des bornes d'intégration.

Remarque 2. Bien entendu les variables x_1 et x_2 jouent des rôles équivalents. Supposons que sur le domaine \mathcal{D} la variable x_1 varie sur un intervalle $[a, b]$, et que, lorsque x_1 est fixé, la variable x_2 varie sur un intervalle $[\zeta(x_1), \xi(x_1)]$ alors on a

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_a^b \left(\int_{\zeta(x_1)}^{\xi(x_1)} f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1$$

Intuition de la démonstration. Pour comprendre la formule, revenons à la somme (4.1). Considérons une tranche T_i de \mathcal{D} , et une valeur y_i de x_2 donnée, telle que les points d'ordonnée $x_2 = y_i$ soient dans cette tranche. Alors l'abscisse x_1 varie dans l'intervalle $[\varphi(y_i), \psi(y_i)]$. Considérons maintenant tous les rectangles $R_{i,j}$ de la tranche T_i et la somme

$$\sum_j f(M_{i,j}) \Delta x_1.$$

Cette somme représente la valeur approchée de l'intégrale simple

$$\int_{\varphi(y_i)}^{\psi(y_i)} f(x_1, y_i) dx_1.$$

Cette intégrale ne dépend que du nombre y_i . Posons

$$F(x_2) = \int_{\varphi(x_2)}^{\psi(x_2)} f(x_1, x_2) dx_1,$$

de sorte que

$$\sum_j f(M_{i,j}) \Delta x_1 \simeq F(y_i).$$

Pour la somme double que nous considérons, on a

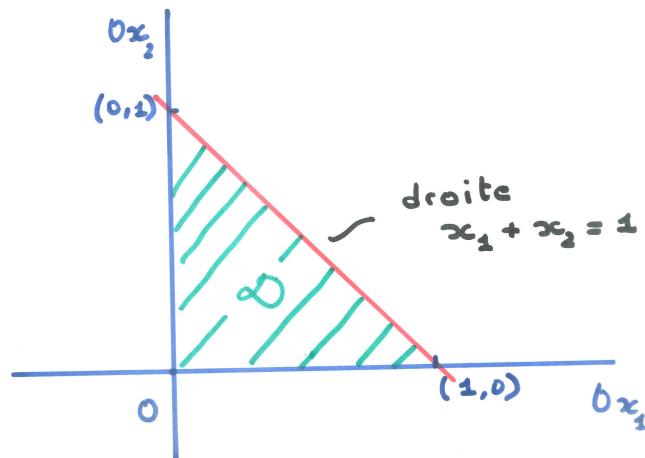
$$\sum \sum f(M_{i,j}) \Delta x_1 \Delta x_2 \simeq \sum F(y_i) \Delta x_2.$$

Sur le domaine \mathcal{D} , y_i varient sur un certain intervalle $[c, d]$. On a

$$\sum \sum f(M_{i,j}) \Delta x_1 \Delta x_2 \simeq \sum F(y_i) \Delta x_2 \simeq \int_c^d F(y) dy.$$

Le théorème s'obtient en faisant tendre Δx_1 et Δx_2 vers 0. \square

Exemple 1. On prend pour domaine le triangle rectangle \mathcal{D} défini par



$$\mathcal{D} = \{(x_1, x_2), x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 1\}.$$

On veut calculer

$$I = \iint_{\mathcal{D}} x_1 x_2 dx_1 dx_2.$$

on voit que x_2 varient sur l'intervalle $[c, d] = [0, 1]$, et que pour une valeur de x_2 donnée, x_1 prend ses valeurs dans $[\varphi(x_2), \psi(x_2)] = [0, 1 - x_2]$. En intégrant d'abord par rapport à x_2 , on a donc

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x_2} x_1 x_2 dx_1 \right) dx_2 = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x_2} x_1 dx_1 \right) x_2 dx_2.$$

On calcule d'abord l'intégrale dans la parenthèse : on a

$$\int_0^{1-x_2} x_1 dx_1 = \left[\frac{x_1^2}{2} \right]_0^{1-x_2} = \frac{1}{2}(1 - x_2)^2.$$

Il en résulte, en utilisant une intégration par parties, que

$$I = \int_0^1 \frac{1}{2} x_2 (1 - x_2)^2 dx_2 = \left[\frac{x_2(1 - x_2)^3}{6} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{(1 - x_2)^3}{6} dx = \frac{1}{24}.$$

4.3 Intégration par parties

Rappelons que dimension un d'espace la formule d'intégration par partie se déduit de la formule fondamentale

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx, \quad (4.2)$$

qui précise le lien entre la dérivation et l'intégration. Voyons ce qu'il advient de ce type de formule en dimension deux, à savoir que donne l'intégration d'une dérivée partielle, par exemple

$$I_1 = \iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) dx_1 dx_2,$$

où f désigne une fonction dérivable de deux variables x_1 et x_2 , sur un domaine \mathcal{D} de contour \mathcal{C} . Plaçons nous sous les mêmes hypothèses que dans la Section 4.2, c'est à dire supposons que l'on a

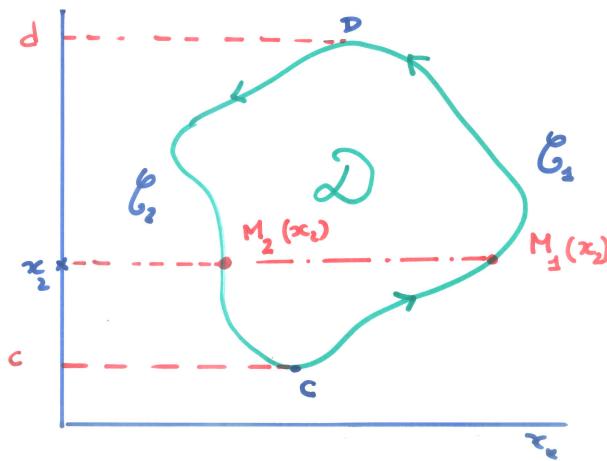
$$\mathcal{D} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \text{ tels que } c \leq x_2 \leq d \text{ et } \varphi(x_2) \leq x_1 \leq \psi(x_2)\}.$$

On peut alors écrire, grâce au Théorème de Fubini

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 &= \int_c^d \left(\int_{\varphi(x_2)}^{\psi(x_2)} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2 \\ &= \int_c^d (f(x_2, \psi(x_2)) - f(x_2, \varphi(x_2))) dx_2. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Orientons maintenant le contour \mathcal{C} dans le sens trigonométrique positif. Nous allons vérifier que le membre de droite de (4.3) peut s'interpréter comme une intégrale curviligne, à savoir

$$I_1 = \int_c^d (f(x_2, \psi(x_2)) - f(x_2, \varphi(x_2))) dx_2 = \int_{\mathcal{C}} f dx_2. \quad (4.4)$$



En effet, on remarque tout d'abord que le contour \mathcal{C} est le réunion de deux courbes paramétrées \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 . La première, \mathcal{C}_1 peut être paramétrée explicitement par $t \mapsto M_1(t) = (t, \psi(t))$, $t \in [c, d]$ alors que \mathcal{C}_2 peut-être paramétrée, si l'on respecte l'orientation, par $t \mapsto M_1(t) = (c + d - t, \varphi(c + d - t))$, $t \in [c, d]$. On a de plus

$$M'_1(t) = (1, \psi'(t)) \text{ et } M'_2(x_2) = (1, -\varphi'(c + d - t)).$$

On a donc

$$\langle f(M_1(t))dx_2, M'_1(t) \rangle = f(M_1(t)) \text{ et } \langle f(M_2(t))dx_2, (M'_2(t)) \rangle = -f(M_2(t)).$$

Le résultat (4.4) s'en déduit par intégration.

Un calcul similaire montre que

$$\iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = - \int_{\mathcal{C}} f dx_1,$$

et on obtient ainsi la formule dit de *Green-Riemann*

Théorème 2 (Formule de Green-Riemann). *Soient f et g deux fonctions dérivables sur un domaine \mathcal{D} de \mathbb{R}^2 . On a la relation*

$$\iint_{\mathcal{D}} \left[\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, x_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) \right] dx_1 dx_2 = \int_{\mathcal{C}} f dx_1 + g dx_2.$$

Remarque 3. Bien entendu, on peut aussi utiliser, si on préfère, le langage des champs de vecteurs, qui est probablement plus intuitif et écrire

$$\iint_{\mathcal{D}} \left[\frac{\partial V_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) - \frac{\partial V_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) \right] dx_1 dx_2 = \int_{\mathcal{C}} \vec{V}(M) d\vec{M}. \quad (4.5)$$

où \vec{V} est le champ de vecteurs $\vec{V}(M) = (V_1(M), V_2(M))$.

Voyons une application intéressante de la formule de Green-Riemann.

Théorème 3. *Supposons que le domaine \mathcal{D} sans trou. Soit $\vec{V} = (V_1, V_2)$ un champ de vecteurs dérivable sur \mathcal{D} . On suppose que*

$$\frac{\partial V_2}{\partial x_1} = \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \text{ sur } \mathcal{D}. \quad (4.6)$$

Alors V est un champ de gradient, c'est à dire qu'il existe une fonction f dérivable sur \mathcal{D} telle que

$$\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} f.$$

Remarque 4. Au chapitre précédent, nous avions déjà vu que la condition (4.6) était nécessaire pour qu'un champ de vecteurs soit un champ de gradient. Le résultat précédent montre donc qu'elle est aussi nécessaire, si le domaine ne possède pas de trou.

Démonstration. Nous allons montrer que si \vec{V} vérifie la relation (4.6), alors V est un champ de vecteurs conservatif, ce qui entraîne la conclusion, grâce à la proposition 9 du chapitre précédent. Soit \mathcal{C}_0 une courbe fermée quelconque incluse dans \mathcal{D} , nous devons montrer que

$$\int_{\mathcal{C}_0} \vec{V}(M) d\vec{M} = 0. \quad (4.7)$$

Soit D_0 le domaine intérieur limité par D . On a grâce à la Remarque 3 et l'hypothèse (4.6)

$$0 = \iint_{D_0} \left[\frac{\partial V_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) - \frac{\partial V_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) \right] dx_1 dx_2 = \int_{C_0} \vec{V}(M) d\vec{M},$$

ce qui donne la conclusion. □

Exemple 2. Considérons un champ de vecteur \vec{V} linéaire, c'est à dire de la forme

$$\vec{V}(\vec{X}) = A \cdot \vec{X},$$

où A est une matrice 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}.$$

On a donc $V_1(x_1, x_2) = a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2$ et $V_2(x_1, x_2) = a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2$, de sorte que

$$\frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2} = a_{2,1} - a_{1,2}.$$

\vec{V} est donc un champ de gradient si et seulement si

$$a_{2,1} = a_{1,2},$$

c'est à dire si et seulement si la matrice A est *symétrique*. Cherchons maintenant une fonction f telle que $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} f$, c'est à dire telle que

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2. \end{cases} \quad (4.8)$$

On intègre la première équation en traitant la variable x_2 comme un paramètre. Ceci donne

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}a_{1,1}x_1^2 + a_{1,2}x_2x_1 + \varphi(x_2). \quad (4.9)$$

où la constante d'intégration $\varphi(x_2)$ est une fonction de x_2 uniquement. En prenant la dérivée partielle par rapport à x_2 de cette expression on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = a_{1,2}x_1 + \varphi'(x_2).$$

En reportant dans la deuxième équation du système (4.10) on trouve donc

$$\varphi'(x_2) = a_{2,1}x_1 - a_{1,2}x_1 + a_{2,2}x_2 = a_{2,2}x_2$$

qui donne en intégrant

$$\varphi(x_2) = \frac{1}{2}a_{2,2}x_2^2 + c,$$

où $c \in \mathbb{R}$ est une constante d'intégration. Il en résulte donc que

$$f = \frac{1}{2}(a_{1,1}x_1^2 + a_{2,2}x_2^2 + 2a_{1,2}x_1x_2) + c.$$

On vérifie ainsi que l'on a $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} f$, avec

$$f(X) = \frac{1}{2}A \cdot \vec{X} \cdot \vec{X} + c$$

la forme quadratique associée à la matrice symétrique A .

Exemple 3. Considérons le champ de vecteurs \vec{V} défini sur \mathbb{R}^2 par

$$\vec{V}(x_1, x_2) = (V_1(x_1, x_2), V_2(x_1, x_2)) = (x_2^4 + 3x_1^3, 4x_1x_2^3 + 2x_2^2).$$

On a

$$\frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2} = 4x_2^3 - 4x_2^3 = 0,$$

de sorte qu'il existe une fonction f telle que $\overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{V}$.

Pour trouver f , il faut donc résoudre le système de deux équations

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = x_2^4 + 3x_1^3 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 4x_1x_2^3 + 2x_2^2. \end{cases} \quad (4.10)$$

On intègre la première équation en traitant la variable x_2 comme un paramètre. On trouve donc

$$f(x_1, x_2) = x_1x_2^4 + \frac{3}{4}x_1^4 + \varphi(x_2),$$

la constante d'intégration $\varphi(x_2)$ étant une fonction de x_2 seulement. En prenant la dérivée partielle par rapport à x_2 de cette expression on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 4x_1x_2^3 + \varphi'(x_2).$$

En reportant dans la deuxième équation du système (4.10) on trouve donc

$$\varphi'(x_2) = 4x_1x_2^3 + 2x_2^2 - 4x_1x_2^3 = 2x_2^2,$$

qui donne en intégrant

$$\varphi(x_2) = \frac{2}{3}x_2^3 - c,$$

où $c \in \mathbb{R}$ est une constante d'intégration. Il en résulte donc que

$$f = \frac{2}{3}x_2^3 + x_1x_2^4 + \frac{3}{4}x_1^4 + c.$$

En guise d'exercice, voyons comment on peut retrouver la valeur de f par la formule (3.11) sur une courbe appropriées, par exemple

$$\widehat{OX} = [O, X_1] \cap [X_1, X],$$

où $X_1 = (x_1, 0)$. On peut paramétriser le segment $[0, X_1]$ par $s \mapsto M(s) = (s, 0)$ de sorte que $\vec{M}'(s) = (1, 0)$ et donc, sur ce segment, on a

$$\vec{V}(M)d\vec{M} = \vec{V}(s, 0) \cdot (1, 0)ds = V_1(s, 0)ds = 3s^3ds.$$

De même, on paramètre le segment $[X_1, X]$ par $s \mapsto M(s) = (x_1, s)$, de sorte que $\vec{M}'(s) = (0, 1)$ et

$$\vec{V}(M)d\vec{M} = \vec{V}(x_1, s) \cdot (0, 1)ds = V_2(x_1, s)ds = (4x_1s^3 + 2s^2)ds.$$

On a donc

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= \int_0^{x_1} V_1(s, 0) ds + \int_0^{x_2} V_2(x_1, s) ds \\ &= \int_0^{x_1} 3s^3 ds + \int_0^{x_2} (4x_1 s^3 + 2s^2) ds \\ &= \frac{3}{4}x_1^4 + x_1 x_2^4 + \frac{2}{3}x_2^3, \end{aligned}$$

et toutes les solutions de l'équation $\overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{V}$ ont donc la forme $\frac{3}{4}x_1^4 + x_1 x_2^4 + \frac{2}{3}x_2^3 + c$, $c \in \mathbb{R}$.

4.3.1 Calcul de l'aire d'un domaine

On peut utiliser la formule (4.5) pour calculer l'aire du domaine. En effet, le membre de droite de cette identité représente l'aire, si on choisit le champ de vecteurs de sorte que

$$\frac{\partial V_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) - \frac{\partial V_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 1 \text{ sur } \mathcal{D}. \quad (4.11)$$

On peut chercher de tels champs sous forme de champs linéaires. On vérifier en particulier que les champs

$$\vec{V} = (0, x_1), \vec{V} = (0, -x_2) \text{ ou encore } \vec{V} = \frac{1}{2}(-x_2, x_1)$$

sont des solutions de l'équation (4.11). En en déduit, en revenant à (4.5)

Proposition 2. *L'aire du domaine \mathcal{D} est donnée par*

$$\mathcal{Aire}(\mathcal{D}) = \int_{\mathcal{C}} x_1 dx_2 = - \int_{\mathcal{C}} x_2 dx_1 = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{C}} x_1 dx_2 - x_2 dx_1, \quad (4.12)$$

où la courbe \mathcal{C} est orientée dans le sens trigonométrique.

Exemple 4. Nous allons recalculer l'aire de l'ellipse limitée par la courbe \mathcal{C} d'équation

$$x_1 = a \cos t, \quad x_2 = b \sin t \quad t \in [0, 2\pi], a, b > 0$$

qui fournit bien l'orientation demandée. Ainsi l'aire S de l'ellipse est donnée par

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{C}} x_1 dx_2 - x_2 dx_1 \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a \cos t d(b \sin t) - b \sin t d(a \cos t) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab \cos^2 t dt + ab \sin^2 t dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab(\cos^2 t + \sin^2 t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab dt \\ &= \pi ab. \end{aligned}$$

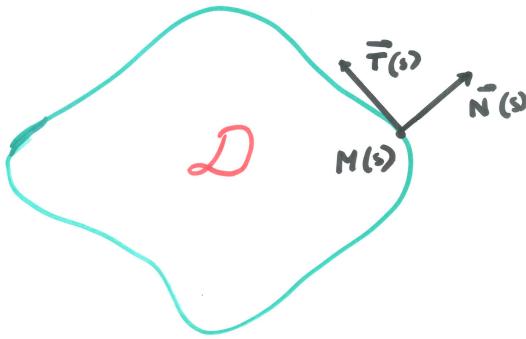
4.3.2 Flux et divergence

Supposons dans cette section que nous ayons un paramétrage naturel $s \mapsto M(s)$ de la courbe \mathcal{C} , où $s \in [0, L]$, et $M(0) = M(L)$, orientée dans le sens trigonométrique positif. On a donc

$$\|\vec{T}(s)\| = \left\| \frac{dM}{ds}(s) \right\| = 1.$$

Soit $\vec{n}(s)$ le vecteur unitaire orthogonal à \vec{T} sortant de \mathcal{D} au point $M(s)$. On peut aussi exprimer cette condition en disant que les vecteurs $(\vec{T}(s), \vec{n}(s))$ forment une base orthonormée directe de \mathbb{R}^2 . En coordonnées, on a

$$\vec{n}(s) = (M'_2(s), -M'_1(s)).$$



Définition 2. On appelle flux du champ de vecteurs \vec{V} à travers la courbe \mathcal{C} l'intégrale

$$\text{Flux}(V, \mathcal{C}) = \int_0^L \vec{V}(M(s)) \cdot \vec{n}(s) ds.$$

Par abus de notation, on notera cette intégrale

$$\text{Flux}(V, \mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} \vec{V}(M(s)) \cdot \vec{n}(s) ds$$

Introduisons maintenant la *divergence* d'un champ de vecteurs.

Définition 3. Soit \vec{V} un champ de vecteurs dérivable sur un domaine \mathcal{D} , de dérivées continues. On appelle *divergence* du champ de vecteurs \vec{V} la *fonction* définie sur \mathcal{D} par

$$\text{div } \vec{V}(M) = \frac{\partial V_1}{\partial x_1}(M) + \frac{\partial V_2}{\partial x_2}(M)$$

Exemple 5. Si $\vec{V}(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$ alors $\text{div } \vec{V} = 2$, alors que si $V(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$, alors $\text{div } \vec{V} = 0$. De manière plus générale, si \vec{V} est un champ linéaire, c'est à dire de la forme

$$\vec{V}(\vec{X}) = A \cdot \vec{X},$$

où A est une matrice 2×2 , alors on vérifie (exercice) que $\text{div } \vec{V}$ est une fonction scalaire constante, et que

$$\text{div } \vec{V} = \text{Tr } A.$$

ainsi, si A est antisymétrique, alors $\text{div } \vec{V} = 0$.

Avec ces notations le Théorème 4.5 peut se formuler comme suit :

Théorème 4. *On a, sous les hypothèses ci-dessus*

$$\iint_{\mathcal{D}} \operatorname{div} \vec{V}(M) dx_1 dx_2 = \operatorname{Flux}(V, \mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} \vec{V}(M(s)) \cdot \vec{n}(s) ds.$$

L'intégrale de la divergence est donc égale au flux à travers le contour. On appelle parfois ce résultat le *théorème flux-divergence* ou encore le *théorème de Green-Ostrogradski*. Nous verrons plus loin les interprétations physiques de cette relation.

Démonstration. Introduisons le champ de vecteurs $\vec{V}^\perp = (V_1^\perp, V_2^\perp)$ qui se déduit du champ \vec{V} par

$$\vec{V}^\perp(M) = (-V_2(M), V_1(M)),$$

de sorte que

$$\operatorname{div} \vec{V}(M) = \frac{\partial V_2^\perp}{\partial x_1}(x_1, x_2) - \frac{\partial V_1^\perp}{\partial x_2}(x_1, x_2).$$

La relation (4.5) nous donne alors

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}} \operatorname{div} \vec{V}(M) dx_1 dx_2 &= \int_{\mathcal{C}} \vec{V}(M)^\perp d\vec{M}. \\ &= \int_0^L V(M)^\perp \cdot \vec{M}'(s) ds \end{aligned}$$

On remarque que

$$\vec{V}(M(s))^\perp \cdot \vec{M}'(s) = -V_2(M(s)) \cdot M'_1(s) + V_1(M(s)) \cdot M'_2(s) = \vec{V}(M) \cdot \vec{n}(s).$$

La conclusion en découle. □

4.3.3 Autres formules

Nous donnons dans ce paragraphe quelques formules dérivées des relations précédentes.

Proposition 3. *Soit f une fonction et \vec{V} un champ de vecteurs définis, dérивables et de dérivées continues sur \mathcal{D} .*

- *Le champ de vecteurs $f\vec{V}$ défini par $f\vec{V}(M) = f(M)\vec{V}(M)$ pour tout $M \in \mathcal{D}$ est un champ de vecteurs dérivable sur \mathcal{D} dont la divergence est la fonction qui s'écrit*

$$\operatorname{div}(f\vec{V}) = f \operatorname{div} V + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} f. \quad (4.13)$$

- *si f est deux fois dérivable alors*

$$\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} f) = \Delta f \quad (4.14)$$

et

$$\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}}^\perp f) = 0. \quad (4.15)$$

- *Si f et g sont des fonctions deux fois dérивables alors*

$$g\Delta f = \operatorname{div}(g \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} f) - \overrightarrow{\operatorname{grad}} g \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} f. \quad (4.16)$$

Démonstration. Pour (4.13) on applique la formule de Taylor qui donne

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(f\vec{V}) &= \frac{\partial(fV_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(fV_2)}{\partial x_2} \\ &= f \left[\frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} \right] + V_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + V_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ &= f \operatorname{div} V + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} f.\end{aligned}$$

Pour (4.14) on a comme $\overrightarrow{\operatorname{grad}} f = (f_{x_1}, f_{x_2})$

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} f) &= \frac{\partial f_{x_1}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{x_2}}{\partial x_2} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_2} = \Delta f.\end{aligned}$$

Pour (4.15) on a comme $\overrightarrow{\operatorname{grad}}^\perp f = (-f_{x_2}, f_{x_1})$

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}}^\perp f) &= -\frac{\partial f_{x_2}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{x_1}}{\partial x_2} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = 0.\end{aligned}$$

Enfin pour (4.16), on utilise (4.13) et (4.14) pour écrire

$$\begin{aligned}g\Delta f &= g \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} f) \\ &= \operatorname{div}(g \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} f) - \overrightarrow{\operatorname{grad}} g \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} f\end{aligned}$$

De ces formules, on peut déduire un certain nombre de formules intégrales :

Proposition 4. Soit f une fonction et \vec{V} un champ de vecteurs définis, dérivables et de dérivées continues sur \mathcal{D} .

- On a pour $i = 1, 2$ et en écrivant $\vec{n}(s) = (n_1(s), n_2(s))$

$$\iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_1 dx_2 = \int_{\mathcal{C}} f(M(s)) \cdot n_i(s) ds$$

et donc

$$\iint_{\mathcal{D}} \overrightarrow{\operatorname{grad}} f \cdot dx_1 dx_2 = \int_{\mathcal{C}} f \vec{n}(s) ds.$$

[Attention : il s'agit d'une égalité de vecteurs !]

- On a

$$\iint_{\mathcal{D}} f \operatorname{div} V dx_1 dx_2 = \int_{\mathcal{C}} f(M(s)) \vec{V}(M(s)) ds - \iint_{\mathcal{D}} \overrightarrow{\operatorname{grad}} f \cdot V dx_1 dx_2.$$

Démonstration. Pour la première identité, on prend le champ de vecteurs $V = (f, 0)$ si $i=1$, et $\vec{V} = (0, f)$ si $i = 2$ puis on applique le Théorème 4. Pour la dernière, on part de la formule (4.13) et on applique de nouveau le Théorème 4.

4.3.4 La divergence en coordonnées polaires

Comme nous l'avons déjà vu, la base de référence pour faire des calculs en coordonnées polaire, c'est la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$. Il s'agit d'un repère mobile, puisqu'il dépend du point où il est considéré. Supposons donc que le champ de vecteurs considéré \vec{V} soit exprimé en coordonnées polaires au point $M = (r \cos \theta, r \sin \theta)$

$$\vec{V}(M) = V_r(r, \theta) \vec{e}_r(M) + V_\theta(r, \theta) \vec{e}_\theta(M).$$

où

$$\vec{e}_r = (\cos \theta, \sin \theta) \text{ et } \vec{e}_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta).$$

Si on écrit maintenant $\vec{V} = (V_1, V_2)$ en coordonnées cartésiennes, on obtient

$$V_1 = V_r(r, \theta) \cos \theta - V_\theta(r, \theta) \sin \theta$$

et

$$V_2 = V_r(r, \theta) \sin \theta + V_\theta(r, \theta) \cos \theta.$$

Il vient alors, par la règle des fonctions composées, et en utilisant l'expression de la matrice Jacobienne (2.18)

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} &= \frac{\partial V_1}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_1} + \frac{\partial V_1}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_1} = \cos \theta \frac{\partial V_1}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial V_1}{\partial \theta} \\ &= \cos \theta \left[\frac{\partial V_r}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial V_\theta}{\partial r} \sin \theta \right] \\ &\quad - \frac{1}{r} \sin \theta \left[\left[\frac{\partial V_r}{\partial \theta} \cos \theta - V_r \sin \theta - \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \sin \theta - V_\theta \cos \theta \right] \right. \\ &= \cos^2 \theta \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} \sin^2 \theta + \frac{1}{r} \sin^2 \theta \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \\ &\quad \left. - \frac{1}{r} \sin \theta \cos \theta \left[r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{\partial V_\theta}{\partial r} - V_\theta \right] \right] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_2}{\partial x_2} &= \frac{\partial V_2}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_2} + \frac{\partial V_2}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_2} = \sin \theta \frac{\partial V_2}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial V_2}{\partial \theta} \\ &= \sin \theta \left[\frac{\partial V_r}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial V_\theta}{\partial r} \cos \theta \right] \\ &\quad + \frac{1}{r} \cos \theta \left[\left[\frac{\partial V_r}{\partial \theta} \sin \theta + V_r \cos \theta + \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \cos \theta - V_\theta \sin \theta \right] \right. \\ &= \sin^2 \theta \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} \sin^2 \theta + \frac{1}{r} \cos^2 \theta \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \\ &\quad \left. + \frac{1}{r} \sin \theta \cos \theta \left[r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{\partial V_\theta}{\partial r} - V_\theta \right] \right] \end{aligned}$$

En faisant la somme, on trouve finalement

$$\operatorname{div} V = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} = \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}$$

ou encore

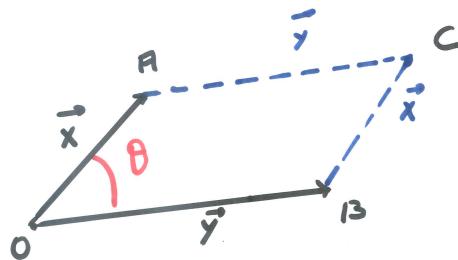
$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}.$$

4.4 Changements de variables

Commençons par quelques rappels de géométrie élémentaire.

4.4.1 Aire d'un paralléléogramme

Considérons tout d'abord le paralléléogramme $OACB$ ci dessous :



Ces cotés sont deux à deux parallèles, on donc,

$$\vec{X} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC}$$

et

$$\vec{Y} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AC}.$$

Cherchons maintenant à calculer l'aire \mathcal{A} de ce paralléléogramme. La géométrie élémentaire nous enseigne que

$$\mathcal{A} = \|\vec{X}\| \cdot \|\vec{Y}\| \sin \theta.$$

Ce résultat peut aussi s'écrire en utilisant la théorie du *déterminant*, à savoir

$$\mathcal{A} = |\det(\vec{X}, \vec{Y})| = \left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right| = |x_1 y_2 - x_2 y_1|.$$

Considérons maintenant une application *linéaire* T de \mathbb{R}^2 vers \mathbb{R}^2 , et calculons l'aire de l'image par T du carré $C = [0, 1]^2$. L'image de ce carré est un paralléléogramme porté par les vecteurs $T(e_1)$ et $T(e_2)$ de sorte que l'aire (algébrique cette fois) se calcule comme

$$\text{Aire}(T([0, 1]^2)) = |\det(T)|. \quad (4.17)$$

De manière plus générale, si on considère le rectangle $[0, \ell_1] \times [0, \ell_2]$, alors l'aire algébrique de son image par T

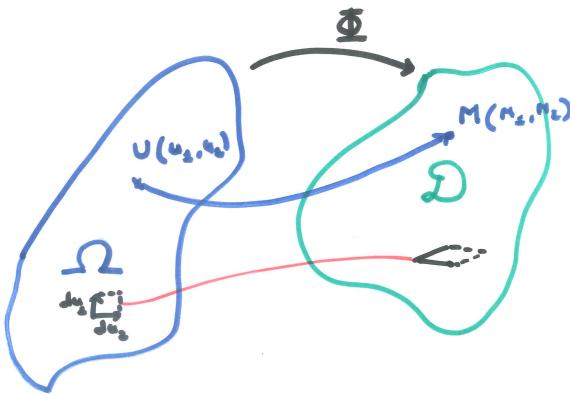
$$\text{Aire}(T([0, \ell_1] \times [0, \ell_2])) = \ell_1 \ell_2 |\det(T)|. \quad (4.18)$$

4.4.2 Aire de l'image d'un rectangle élémentaire

Considérons maintenant une application Φ d'un domaine Ω de \mathbb{R}^2 vers un domaine \mathcal{D} de \mathbb{R}^2 également, supposée dérivable de dérives continues. On suppose de que Φ est de plus une bijection de Ω sur \mathcal{D} , de sorte que Ω peut être considéré comme un *paramétrage* de \mathcal{D} par le domaine Ω . Il s'agit de la situation typique que l'on rencontre lorsqu'on fait un *changement de variable* : si $M = (M_1, M_2)$ un point quelconque de \mathcal{D} , et si

$$U = (u_1, u_2) = \phi^{-1}(M), \text{ c'est à dire } M_1 = \Phi_1(u_1, u_2) \text{ et } M_2 = \Phi_2(u_1, u_2).$$

alors les valeurs de u_1 et u_2 correspondent aux nouvelles coordonnées de M .



Soit donc $M = (M_1, M_2)$ un point quelconque de \mathcal{D} , et $U = (u_1, u_2)$ comme ci dessus. Il résulte des résultats de la Section 2.5.4 du Chapitre 2, qu'au premier ordre l'application Φ est bien approchée, près de U par l'application affine $\Phi(U) + D_\Phi(U)\vec{h}$, plus précisément on a

$$\Phi(U + \vec{h}) = \Phi(U) + D_\Phi(U)\vec{h} + \|h\|\varepsilon(h),$$

où D_Φ désigne la matrice jacobienne de Φ c'est à dire

$$D_\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial u_1} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial u_2} \end{pmatrix}.$$

Considérons maintenant un rectangle élémentaire de cotés de longueurs Δu_1 et Δu_2 dont un des sommets est U . On a d'après les résultats de la section précédente et le développement limité (4.4.2)

$$\text{Aire}(\Phi([u_1, u_1 + \Delta u_1] \times [u_2, u_2 + \Delta u_2])) = \det(D_\Phi(U))\Delta u_1 \Delta u_2 + o(\Delta u_1 \Delta u_2). \quad (4.19)$$

4.4.3 La formule du changement de variable

On considère une fonction f définie sur \mathcal{D} . La fonction $f \circ \Phi$ est donc définie sur Ω . On a alors

Théorème 5. *On a*

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \iint_{\Omega} f(\Phi(u_1, u_2)) |\det(D_\Phi(u_1, u_2))| du_1 du_2$$

où $\det D_\Phi$ désigne le déterminant jacobien

$$\det D_\Phi(u_1, u_2) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_1}(u_1, u_2) & \frac{\partial \Phi_1}{\partial u_2}(u_1, u_2) \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial u_1}(u_1, u_2) & \frac{\partial \Phi_2}{\partial u_2}(u_1, u_2) \end{vmatrix}.$$

Remarque 5. Notons qu'il faut prendre ici la valeur absolue du déterminant Jacobien (qui peut bien entendu être négatif).

Idée de la démonstration. Elle s'appuie sur l'interprétation de l'intégrale comme l'aire pondérée. Dans cette interprétation, l'intégrale du membre de droite

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \tag{4.20}$$

représente donc l'aire de \mathcal{D} , pondérée par la fonction f . Par ailleurs, la fonction Φ nous permet de paramétriser \mathcal{D} par Ω . Si on découpe, comme nous l'avons fait pour (4.1) sur \mathcal{D} , le domaine Ω en rectangles élémentaires $R_{i,j}$ de cotés de tailles Δu_1 et Δu_2 , alors l'aire de l'image par Φ de $R_{i,j}$ est approximativement l'aire d'un parallélogramme donnée par (4.19), c'est à dire

$$|\det(D_\Phi(U_{i,j}))| \Delta u_1 \Delta u_2,$$

où $U_{i,j}$ est un des sommets du rectangle $R_{i,j}$. En pondérant cette aire par $f(\Phi(U_{i,j}))$ et en sommant on trouve donc une approximation de (4.20), à savoir

$$\iint_D f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \approx \sum_{i,j} f(\Phi(U_{i,j})) |\det(D_\Phi(U_{i,j}))| \Delta u_1 \Delta u_2,$$

ce qui mène directement au résultat. \square

Remarque 6. On utilise aussi la notation

$$\det D_\Phi(u_1, u_2) = \frac{D(\Phi_1, \Phi_2)}{D(u_1, u_2)} = \frac{D(x_1, x_2)}{D(u_1, u_2)}$$

pour désigner le déterminant Jacobien. en particulier si

Remarque 7. Il résulte de la formule de changement de variables, en prenant $f = 1$ que

$$\mathcal{Aire}(\mathcal{D}) = \iint_{\Omega} |\det D_\Phi(u_1, u_2)| du_1 du_2.$$

En particulier, si $|\det D_\Phi(u_1, u_2)| = 1$ sur Ω alors

$$\mathcal{Aire}(\mathcal{D}) = \mathcal{Aire}(\Omega).$$

Coordonnées polaires. Le calcul des intégrales en coordonnées polaires fournit un exemple intéressant d'application de la formule de changement de variable.

Considérons le disque D_a de centre 0 et de rayon a . Si on paramètre ce domaine en coordonnées polaires, c'est à dire que l'on fait correspondre aux nombres (r, θ) le point M_2 de \mathcal{D} de coordonnées cartésiennes

$$M_1 = r \cos \theta \text{ et } M_2 = r \sin \theta,$$

alors nous sommes exactement dans la situation que nous avons décrite plus haut : ici $\Omega = [0, a] \times [0, 2\pi]$, $\mathcal{D} = D_a$ et

$$\Phi_1(r, \theta) = r \cos \theta \text{ et } \Phi_2(r, \theta) = r \sin \theta.$$

Calculons le déterminant Jacobien de Φ :

$$\det D_\Phi(r, \theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r}(r, \theta) & \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta}(r, \theta) \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial r}(r, \theta) & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta}(r, \theta) \end{vmatrix}.$$

Si on procède au calcul effectif, il vient

$$\det D_\Phi(r, \theta) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r$$

Soit maintenant f une fonction définie sur D_a . Posons $\tilde{f}(r, \theta) = f \circ \Phi(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$. Il vient

$$\begin{aligned} \iint_{D_a} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 &= \iint_{[0, a] \times [0, 2\pi]} \tilde{f}(r, \theta) r dr d\theta \\ &= \iint_{[0, a] \times [0, 2\pi]} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta. \end{aligned}$$

en termes abrégés, on dit souvent que l'élément de volume s'écrit, en coordonnées polaires comme $r dr d\theta$.

Exemple 6. Calculons l'intégrale double

$$I = \iint_{\mathcal{D}} \frac{1}{1 + x_1^2 + x_2^2} dx_1 dx_2,$$

où $\mathcal{D} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1^2 + x_2^2 < 1\}$. En coordonnées polaires, on a donc

$$I = \iint_{[0, 1] \times [0, 2\pi]} \frac{1}{1 + r^2} r dr d\theta = \iint_{[0, 1] \times [0, 2\pi]} \frac{r}{1 + r^2} dr d\theta.$$

En utilisant la formule de Fubini on trouve donc

$$I = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \frac{r}{1 + r^2} dr \right) d\theta = 2\pi \int_0^1 \frac{r}{1 + r^2} dr.$$

Pour calculer cette dernière intégrale posons $u = r^2$ de sorte que $du = 2r dr$ et

$$I = \pi \int_0^1 \frac{1}{1 + u} du = \pi [\log(1 + u)]_0^1 = \pi \log 2.$$

4.4.4 Invariances par changement de repère orthonormé.

La formule du changement de variables montre immédiatement que les intégrales sont invariantes par changement de repères orthonormés. Montrons qu'il en est de même pour la *divergence*. La discussion que nous menons ici est tout à fait parallèle à celle menée dans la section (3.1.2) pour le gradient.

Comme pour le gradient que la définition (3) est relative à un choix de repère orthonormé (\vec{e}_1, \vec{e}_2) , qui détermine les coordonnées cartésiennes (x_1, x_2) . Introduisons un nouveau repère orthonormé (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2) et des coordonnées x'_1, x'_2 correspondantes de sorte que $x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 = x'_1 \vec{e}'_1 + x'_2 \vec{e}'_2$? Soit \vec{V} un champs de vecteur donné sur \mathcal{D} . Ce champ s'exprime dans la base (\vec{e}_1, \vec{e}_2) comme

$$\vec{V}(M) = V_1(x_1, x_2) \vec{e}_1 + V_2(x_1, x_2) \vec{e}_2, \text{ pour } M \text{ de coordonnées } (x_1, x_2) \text{ dans } (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$$

Son expression dans la nouvelle base sera alors

$$\vec{V}(M) = V'_1(x'_1, x'_2) \vec{e}'_1 + V'_2(x'_1, x'_2) \vec{e}'_2, \text{ pour } M \text{ de coordonnées } (x'_1, x'_2) \text{ dans } (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2).$$

En posant $\vec{X} = (x_1, x_2)$ et $\vec{X}' = (x'_1, x'_2)$ on a

$${}^t \vec{X} = P {}^t X',$$

où $P = P(\epsilon \rightarrow \epsilon')$ désigne la matrice de passage de l'ancienne base vers la nouvelle. De même, il vient

$$\vec{V}'(x'_1, x'_2) = \begin{pmatrix} V'_1(x'_1, x'_2) \\ V'_2(x'_1, x'_2) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} V_1(x_1, x_2) \\ V_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} = p \vec{V}(x_1, x_2). \quad (4.21)$$

Quelle est l'expression de la divergence dans cette nouvelle base?

Proposition 5. *On a pour tout $M \in \mathcal{D}$*

$$\operatorname{div} \vec{V}(M) = \frac{\partial V'_1}{\partial x'_1}(x'_1, x'_2) + \frac{\partial V'_2}{\partial x'_2}(x'_1, x'_2),$$

où (x_1, x'_2) désigne les coordonnées de M dans la base (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2) .

L'expression de la divergence dans la nouvelle base est donc identique à celle dans l'ancienne base.

Preuve. L'expression (6.6) s'écrit comme

$$\vec{V}'(\vec{X}') = P \vec{V}(P {}^t \vec{X}').$$

On utilisant la règle de dérivation composée on trouve

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial V'_1}{\partial x'_1} & \frac{\partial V'_1}{\partial x'_2} \\ \frac{\partial V'_2}{\partial x'_1} & \frac{\partial V'_2}{\partial x'_2} \end{pmatrix} (x'_1, x'_2) = P \begin{pmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} & \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial V_2}{\partial x_1} & \frac{\partial V_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} (x_1, x_2) P {}^t$$

et donc comme $P {}^t = P^{-1}$,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} & \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial V_2}{\partial x_1} & \frac{\partial V_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} (x_1, x_2) = P {}^t \begin{pmatrix} \frac{\partial V'_1}{\partial x'_1} & \frac{\partial V'_1}{\partial x'_2} \\ \frac{\partial V'_2}{\partial x'_1} & \frac{\partial V'_2}{\partial x'_2} \end{pmatrix} (x'_1, x'_2) P$$

la divergence correspond à la trace de la matrice du membre de gauche de cette expression. Comme une trace est invariante par conjugaison, c'est à dire

$$\operatorname{Tr} A = \operatorname{tr} PAP^{-1}$$

pour toute matrices A et P , si P est inversible, le résultat en découle.

□

Remarque 8. Attention, l'énoncé n'est valable que pour des changements de bases *orthonormé*.

4.5 Calcul du volume d'un domaine de \mathbb{R}^3

Soit f une fonction de deux variables définie sur un domaine \mathcal{D} , limité par une courbe \mathcal{C} . Nous avons déjà vu que si f est une fonction positive définie sur \mathcal{D} , et Γ_f la surface de \mathbb{R}^3 représentant le graphe de f , alors l'intégrale de f sur \mathcal{D} fournit le volume du domaine \mathcal{V} de \mathbb{R}^3 délimité par Γ_f et les parallèles à Ox_3 menées par les points de \mathcal{C} . Ceci permet de calculer des volumes dans \mathbb{R}^3 . Donnons un exemple.

Considérons la boule B de \mathbb{R}^3 centrée à l'origine $(0, 0, 0)$ et de rayon R . La demi-boule supérieure est limitée par le graphe de la fonction

$$x_3 = \sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2}$$

au dessus du disque D_R de \mathbb{R}^2 de centre 0 et de rayon R . Le volume de B est donc donné par

$$\text{Vol}(B) = 2 \iint_{D_R} \sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2} dx_1 dx_2.$$

Pour calculer cette intégrale effectuons le changement de variables polaires

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta,$$

où (r, θ) prend ces valeurs dans le domaine $\Omega = [0, R] \times [0, 2\pi]$, et

$$\frac{D(x_1, x_2)}{D(r, \theta)} = r.$$

On obtient

$$\sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2} = \sqrt{R^2 - r^2}$$

de sorte que

$$\text{Vol}(B) = 2 \iint_{\Omega} \sqrt{R^2 - r^2} r dr d\theta.$$

En appliquant le théorème de Fubini il vient

$$\text{Vol}(B) = 2 \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 - r^2} r d\theta \right) dr.$$

On intègre d'abord par rapport à θ . Comme $\sqrt{R^2 - r^2} r$ ne dépend pas de θ , on obtient

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 - r^2} r d\theta = 2\pi \sqrt{R^2 - r^2} r,$$

d'où

$$\begin{aligned} \text{Vol}(B) &= 2 \int_0^R 2\pi \sqrt{R^2 - r^2} r dr \\ &= 4\pi \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2} r dr. \end{aligned}$$

Pour calculer cette intégrale, on peut faire le changement de variable $t = R^2 - r^2$. On a alors $dt = -2rdr$, c'est à dire $rdr = -\frac{1}{2}dt$, et t varie entre R^2 et 0. On obtient

$$\text{Vol}(B) = 4\pi \int_{R^2}^0 t^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{2}\right) dt = 2\pi \int_0^{R^2} t^{\frac{1}{2}} dt = 2\pi \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_0^{R^2} = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

4.6 Interprétation de la divergence et du flux

Nous avons introduit l'opérateur "divergence" dans la Section 4.3.2. Cet opérateur intervient dans de nombreuses modélisations, en physique, en mécanique, ou en biologie. Le but de cette section est d'éclairer un mécanisme dans lequel cet opérateur intervient de manière naturelle.

Considérons un domaine \mathcal{D} de \mathbb{R}^2 , et un champ de vecteurs \vec{V} défini sur \mathcal{D} . Reprenons l'analogie avec le champs de vitesse d'un fluide, développée à la Section 3.1.3, c'est à dire supposons que le champ de vecteurs \vec{V} représente le champ des vitesses du fluide : pour chaque point M du domaine, $\vec{V}(M)$ désigne la vitesse des particules élémentaires constituant ce fluide en ce point. Les particules du fluides sont donc régies par l'équation (3.6)

$$\begin{cases} \frac{dM}{dt}(t) = \vec{V}(M(t)), t \in I \\ M(0) = M_0, \end{cases} \quad (4.22)$$

La particule étant au temps 0 en M_0 se retrouve au temps t en $M(t)$. Soit Ω_0 un domaine inclus dans \mathcal{D} strictement, et soit Ω_t le domaine occupé au temps t par les particules présentes au temps 0 dans Ω_0 . La question que nous nous posons alors est la suivante :

Q : Comment l'aire de Ω_t notée $\mathcal{A}\text{ire}(\Omega_t)$ évolue-t-elle au cours du temps ?

Essayons de calculer en particulier la variation

$$\frac{d\mathcal{A}\text{ire}(\Omega_t)}{dt} \Big|_{t=0}.$$

A cet effet, remarquons tout d'abord que

$$\mathcal{A}\text{ire}(\Omega_t) = \iint_{\Omega_t} dx_1 dx_2,$$

intégrale dont le domaine change au cours du temps. Afin de nous ramener à un domaine fixe, nous allons *paramétriser* le domaine Ω_t par le domaine au temps 0, à savoir Ω_0 . Notons Φ_t l'application qui au point M_0 associe sa position $M(t)$ au temps t , c'est à dire

$$\Phi_t(M_0) = M(t)$$

où $M(t)$ est la solution de l'équation différentielle (4.22). La formule du changement de variable nous donne alors

$$\iint_{\Omega_t} dx_1 dx_2 = \iint_{\Omega_0} |J_{\Phi_t}(m_1, m_2)| dm_1 dm_2,$$

ou en a pose

$$J_{\Phi_t} = \det(D_{\Phi_t}).$$

On a donc

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{A}\text{ire}(\Omega_t)}{dt} \Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt} \left[\iint_{\Omega_0} J_{\Phi_t}(m_1, m_2) dm_1 dm_2 \right] \Big|_{t=0} \\ &= \iint_{\Omega_0} \frac{d}{dt} [J_{\Phi_t}(m_1, m_2)] \Big|_{t=0} dm_1 dm_2. \end{aligned} \quad (4.23)$$

où nous nous sommes autorisés, sans le justifier, à dériver sous le signe somme. On a alors le résultat suivant

Proposition 6. On a

$$\frac{d}{dt} [J_{\Phi_t}(m_1, m_2)]_{|t=0} = \operatorname{div} \vec{V}(m_1, m_2).$$

Justification. Nous n'allons pas fournir de preuve rigoureuse de ce résultat, mais, en revanche, essayer d'en indiquer une justification intuitive. Au vu de (4.22) on a envie d'écrire pour t petit

$$\Phi_t(M_0) - M_0 \simeq t \vec{V}(M(t))$$

et donc

$$\begin{aligned} J_{\Phi_t}(m_1, m_2) &\simeq \begin{vmatrix} 1 + t \frac{\partial V_1}{\partial m_1} & t \frac{\partial V_1}{\partial m_2} \\ \frac{\partial V_2}{\partial m_1} & 1 + t \frac{\partial V_2}{\partial m_2} \end{vmatrix} \\ &\simeq 1 + t \left(\frac{\partial V_1}{\partial m_1} + \frac{\partial V_2}{\partial m_2} \right) + t^2 \left(\frac{\partial V_1}{\partial m_1} \frac{\partial V_2}{\partial m_2} - \frac{\partial V_1}{\partial m_2} \frac{\partial V_2}{\partial m_1} \right). \end{aligned}$$

Le résultat s'en déduit. \square

Revenons à (4.23), que nous pouvons maintenant écrire sous la forme

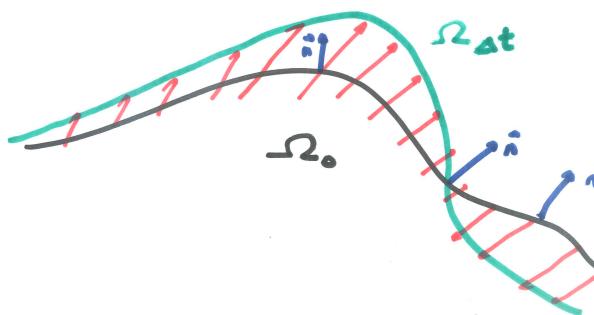
$$\frac{d\mathcal{A}ire(\Omega_t)}{dt} \Big|_{t=0} = \iint_{\Omega_0} \operatorname{div} \vec{V}(m_1, m_2) dm_1 dm_2. \quad (4.24)$$

On peut donc interpréter l'intégrale de la divergence comme la dérivée de l'aire occupée par les particules, lorsqu'elles sont transportées par le champ de vecteurs. Notons que si la divergence du champ de vecteurs est nulle, alors le volume occupé par les particules est *invariant* au cours du temps. C'est par exemple approximativement le cas pour des liquides comme l'eau. Les gaz, en revanche, sont compressibles.

Interprétation du flux. Considérons un variation de temps élémentaire Δt , qui fait passer le domaine Ω_0 à $\Omega_{\Delta t}$. Si l'on compare le volume occupé par les deux domaines, on s'aperçoit que la différence entre les deux domaines est due, au premier ordre, aux particules près de la frontières, transportées par le champ de vecteurs \vec{V} . Une particule présente au temps 0 en M se retrouve au temps Δt au point $M + \vec{V}(M)\Delta t$. La différence entre les deux domaines, est représentée, en première approximation, par la courbe \mathcal{C} que l'on munit d'une "épaisseur" en chaque point de l'ordre de $\vec{V} \cdot \vec{n} \Delta t$. La différence de volume est donc

$$\Delta t \int_{\mathcal{C}} \vec{V} \cdot \vec{n}(s) ds.$$

qui est précisément le flux multiplié par Δt .



Equation de conservation (hors programme). Supposons que le fluide ait une densité $\rho(t, M)$ par unité de surface au point M . La masse contenue dans Ω_t s'écrit donc

$$\mathcal{M}(t) = \iint_{\Omega_t} \rho(t, x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \iint_{\Omega_0} \rho(t, \Phi_t(m_1, m_2)) J_{\Phi_t}(m_1, m_2) dm_1 dm_2 \quad (4.25)$$

la conservation de la masse s'écrit

$$\frac{d}{dt} \mathcal{M}(t) = 0. \quad (4.26)$$

En dérivant l'expression (4.25) on trouve

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{M}(t)|_{t=0} &= \iint_{\Omega_0} \frac{d}{dt} [\rho(t, \Phi_t(m_1, m_2))]|_{t=0} J_{\Phi_t}(m_1, m_2) dm_1 dm_2 \\ &\quad + \iint_{\Omega_0} \rho(0, m_1, m_2) \frac{d}{dt} [J_{\Phi_t}(m_1, m_2)]|_{t=0} dm_1 dm_2. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Comme $\Phi_0 = \text{Id}$, on a $J_{\Phi_0}(m_1, m_2) = 1$. Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\rho(t, \Phi_t(m_1, m_2))] &= \frac{\partial \rho}{\partial t}((t, \Phi_t(m_1, m_2))) + \frac{d}{dt}(\Phi_t(M(t)) \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\rho) \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial t}((t, \Phi_t(m_1, m_2))) + \vec{V}(\Phi_t(m_1, m_2)) \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\rho, \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{d}{dt} [\rho(t, \Phi_t(m_1, m_2))]|_{t=0} = \frac{\partial \rho}{\partial t}((t, m_1, m_2)) + \vec{V}(m_1, m_2) \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\rho(0, m_1, m_2).$$

En reportant ces relations ainsi que (4.24) dans (4.27) on obtient finalement

$$\frac{d}{dt} \mathcal{M}(t)|_{t=0} = \iint_{\Omega_0} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\rho + \rho \cdot \text{div } \vec{V} \right] (0, m_1, m_2) dm_1 dm_2.$$

Comme

$$\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\rho + \rho \cdot \text{div } \vec{V} = \text{div}(\rho \vec{V})$$

et en utilisant maintenant la conservation de la masse (4.26) on obtient

$$\iint_{\Omega_0} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) \right] (0, m_1, m_2) dm_1 dm_2 = 0.$$

Cette identité étant vraie pour tout domaine Ω_0 , on en déduit finalement l'équation locale de conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0. \quad (4.28)$$

Remarque 9. Dans de nombreuses applications, le champ de vecteurs \vec{V} dépend également de t . Cependant, cela ne change pas le résultat des calculs précédents, et en particulier (4.28) reste valable.

Exercices

Exercice I

1) Soit A une matrice 2×2 :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}.$$

1) On note A^t la matrice transposée. Montrer que l'on peut décomposer la matrice A de manière unique sous la forme

$$A = B + C,$$

où la matrice B est symétrique, c'est à dire $B = B^t$, et la matrice C est antisymétrique, c'est à dire $C^t = -C$. Donner les expressions de B et C .

2) On considère le champ de vecteur linéaire

$$\vec{V}(X) = A \cdot X,$$

et une courbe fermée \mathcal{C} , orientée dans le sens trigonométrique. Calculer

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{V}(M) d\vec{M}$$

en fonction de l'aire du domaine \mathcal{D} entouré par \mathcal{C} et des coefficients de A .

Chapitre 5

Analyse vectorielle dans \mathbb{R}^3

5.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de voir comment les notions développées dans le cadre des fonctions à deux variables se généralisent aux fonctions de trois variables. Pour de nombreuses notions, cette généralisation se fait sans peine, car elle est assez directe. Certaines notions en revanche requièrent l'introduction de nouveaux concepts, et de nouveaux outils.

Commençons par quelques rappels sur l'espace \mathbb{R}^3 .

5.1.1 Rappels sur \mathbb{R}^3

Comme \mathbb{R}^2 , l'espace \mathbb{R}^3 est un espace vectoriel lorsqu'on le munit de la loi d'addition

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3), \forall X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \forall Y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3.$$

et de la loi de multiplication par un scalaire

$$\lambda.(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3), \forall X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \lambda \in \mathbb{R}.$$

Le produit scalaire noté " \cdot " devient

$$X.Y = x_1.y_1 + x_2.y_2 + x_3.y_3, \forall X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \forall Y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3,$$

et la norme associée dite norme euclidienne $\|\cdot\|$ est alors donnée par

$$\|X\| = \sqrt{X.X} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \geq 0, \forall X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Les propriétés présentées dans la Proposition 1 du Chapitre 2, ou dans les inégalités (2.1) et (2.2) restent valables.

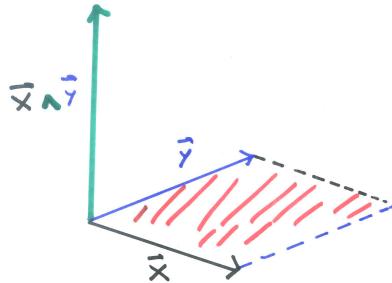
Le produit vectoriel. Cette opération est spécifique à \mathbb{R}^3 : elle associe à un couple de vecteurs de \mathbb{R}^3 un vecteur de \mathbb{R}^3 .

Définition 1. Soit $\vec{X} = (x_1, x_2, x_3)$ et $\vec{Y} = (y_1, y_2, y_3)$ deux vecteurs de \mathbb{R}^3 . Le produit vectoriel de \vec{X} par \vec{Y} est le vecteur, noté $\vec{X} \wedge \vec{Y}$ défini par

$$\vec{X} \wedge \vec{Y} = (x_2 y_3 - y_2 x_3, x_3 y_1 - y_3 x_1, x_1 y_2 - y_1 x_2).$$

Par exemple, si $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ sont les vecteurs de la base canonique, alors on a

$$\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \vec{e}_3, \quad \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 = \vec{e}_1 \text{ et } \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 = \vec{e}_2.$$



Remarque 1. Pour se souvenir de l'ordre dans lequel on doit prendre les coordonnées, on écrit souvent l'opération \wedge en utilisant des vecteurs *colonnes*

$$\vec{X} \wedge \vec{Y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - y_2 x_3 \\ x_3 y_1 - y_3 x_1 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}.$$

La première ligne du produit vectoriel est obtenu en "cachant" la première ligne des vecteurs \vec{X} et \vec{Y} et en prenant le déterminant des éléments restants, et de même pour les autres lignes.

On vérifie les propriétés suivantes :

Proposition 1. On a pour tous vecteurs $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$ de \mathbb{R}^3 et tout nombre λ

$$\begin{aligned} \vec{X} \wedge \vec{Y} &= -\vec{Y} \wedge \vec{X} \\ (\vec{X} + \vec{Y}) \wedge \vec{Z} &= \vec{X} \wedge \vec{Z} + \vec{Y} \wedge \vec{Z}. \\ \vec{X} \wedge (\vec{Y} + \vec{Z}) &= \vec{X} \wedge \vec{Y} + \vec{X} \wedge \vec{Z} \\ (\lambda \vec{X}) \wedge \vec{Y} &= \lambda(\vec{X} \wedge \vec{Y}). \end{aligned}$$

On a également

Proposition 2. On a $\vec{X} \wedge \vec{Y} = 0$ si et seulement si \vec{X} et \vec{Y} sont colinéaires, c'est à dire qu'on a $\vec{X} = \lambda Y$ ou $\vec{Y} = \lambda \vec{X}$ pour une constante λ .

Démonstration. Montrons d'abord que la condition est suffisante. Supposons par exemple que $\vec{X} = \lambda Y$, le cas $= \lambda \vec{X}$ se traitant de même. On a alors $x_1 = \lambda y_1$, $x_2 = \lambda y_2$, $x_3 = \lambda y_3$. Ceci entraîne

$$\vec{X} \wedge Y = ((x_2 y_3 - y_2 x_3), (x_3 y_1 - y_3 x_1), (x_1 y_2 - y_1 x_2)) = (0, 0, 0).$$

Montrons maintenant que la condition est nécessaire. Supposons que $\vec{X} \wedge \vec{Y} = 0$, et montrons que les vecteurs sont colinéaires. Si $X = 0$, on $\vec{X} = 0 \vec{Y}$ et la propriété est donc démontrée. Sinon on a

$(x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0)$. Supposons que $x_1 \neq 0$ (les cas $x_2 \neq 0$ ou $x_3 \neq 0$ se traitent de la même façon). Comme on a supposé que

$$\vec{X} \wedge \vec{Y} = (x_2 y_3 - y_2 x_3, x_3 y_1 - y_3 x_1, x_1 y_2 - y_1 x_2) = (0, 0, 0)$$

on a en particulier $x_3 y_1 - y_3 x_1 = 0$ et $x_1 y_2 - y_1 x_2 = 0$. Comme $x_1 \neq 0$, il en résulte que $y_3 = x_3 y_1 / x_1$ et $y_2 = y_1 x_2 / x_1$. D'où

$$\vec{Y} = (y_1, y_1 x_2 / x_1, x_3 y_1 / x_1) = \frac{y_1}{x_1} (x_1, x_2, x_3) = \lambda \vec{X}$$

où $\lambda = y_1 / x_1$. La propriété est donc démontrée. \square

Finalement nous avons (résultat que nous admettrons)

Proposition 3. *Le vecteur $\vec{X} \wedge \vec{Y}$ est orthogonal aux vecteurs \vec{X} et \vec{Y} . La norme $\|\vec{X} \wedge \vec{Y}\|$ est égale à l'aire du parallélégramme de cotés \vec{X} et \vec{Y} .*

Interprétation géométrique du déterminant

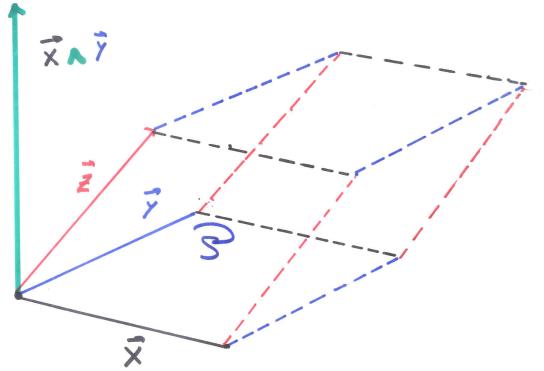
Soient \vec{X} , \vec{Y} , et \vec{Z} trois vecteurs de \mathbb{R}^3 . La valeur absolue du déterminant $\det(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ s'interprète comme le volume du parallélipipède \mathcal{P} dont les côtés sont parallèles à \vec{X} , \vec{Y} et \vec{Z}

$$|\text{Vol}(\mathcal{P})| = \det(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}).$$

Le déterminant est le produit vectoriel sont reliés par la formule suivant

Proposition 4. *Soient \vec{X} , \vec{Y} , et \vec{Z} trois vecteurs de \mathbb{R}^3 . On a*

$$\det(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}) = \vec{X} \wedge \vec{Y} \cdot \vec{Z}.$$



5.2 Limites, continuités et dérivation dans \mathbb{R}^3

La notion de limite, présentée dans le cas des fonctions sur \mathbb{R}^2 au Chapitre 2 dans la définition 2.4, se transpose presque mot pour mot au cas des fonction f sur \mathbb{R}^3 . Il en est de même de la notion de continuité.

La notion de dérivée partielle se généralise également sans peine. Soit f une fonction définie sur \mathbb{R}^3 et M_0 un point du domaine de définition tels que f est définie près de M_0 .

Définition 2. Soit $i = 1, 2$ ou 3 . On appelle *dérivée partielle* de f en M_0 par rapport à la variable x_i la limite suivante, lorsqu'elle existe

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(M_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(M_0 + t\vec{e}_i) - f(M_0)}{t}.$$

on la note

$$f'_{x_i}(M_0), \partial_{x_i} f(M_0) \text{ ou encore comme ci-dessus } \frac{\partial f}{\partial x_i}(M_0).$$

On conserve bien entendu les mêmes règles de calcul :

Proposition 5. *On a pour $i = 1, 2$ ou 3*

$$(f \pm g)_{x_i} = f'_{x_i} \pm g'_{x_i}, (fg)_{x_i} = f'_{x_i}g + fg'_{x_i}.$$

De plus si là où g ne s'annule pas

$$\left(\frac{f}{g}\right)'_{x_i} = \frac{f'_{x_i}g - fg'_{x_i}}{g^2}.$$

On a également le développement limité suivant :

Proposition 6. *On suppose que f'_{x_i} est définie et continue près de M , pour $i = 1, 2$ ou 3 . Alors on a pour $h = (h_1, h_2, h_3)$ petit*

$$f(M+h) = f(m_1 + h_1, m_2 + h_2) = f(M) + h_1 f'_{x_1}(M) + h_2 f'_{x_2}(M) + h_3 f'_{x_3}(M) + \|h\|\varepsilon(h), \quad (5.1)$$

où la fonction ε est définie près de 0 et vérifie

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0.$$

On peut écrire le développement (5.1) sous la forme condensée

$$f'(M+h) - f(M) = h \cdot \overrightarrow{\text{grad}} f(M) + \|h\|\varepsilon(h). \quad (5.2)$$

où on définit le champ de vecteurs $\overrightarrow{\text{grad}}$ comme en dimension deux par la formule

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(M) = (f'_{x_1}(M), f'_{x_2}(M), f'_{x_3}(M)).$$

Enfin, pour calculer la dérivées de fonctions composées, on calcule les matrices Jacobiennes, et on utilise comme en dimension deux la formule (2.17).

Lorsque f est dérivable près d'un point de son domaine de définition et que les dérivées partielles y sont dérивables, les dérivées de ces dernières sont *appelées les dérivées secondes*. On note pour $i = 1, 2, 3$ et $j = 1, 2, 3$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right), \text{ pour } i \neq j$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right),$$

Théorème 1. Si les dérivées seconde existent et sont continues près d'un point M donné, alors on a

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) (M) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (M).$$

La démonstration est similaire à celle de la dimension 2. Elle nous fournit de plus, comme en dimension deux :

Théorème 2. Si les dérivées seconde existent et sont continues près d'un point M donné, alors on a pour $h = (h_1, h_2, h_3)$

$$f(M+h) = f(M) + h \cdot \overrightarrow{\text{grad}} f(M) + \frac{1}{2} \sum_{i,j}^3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (M + \|h\|^2 \varepsilon(h)). \quad (5.3)$$

5.3 Courbes paramétrées dans \mathbb{R}^3

Les définitions sont semblables à celle données pour les courbes de \mathbb{R}^2 . Soit I un intervalle de \mathbb{R} et soit une application $M : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $M(t) = (M_1(t), M_2(t), M_3(t))$, pour $t \in I$. Soit \mathcal{C} l'image de I par M , c'est à dire l'ensemble des points de \mathbb{R}^3 de la forme

$$\mathcal{C} = \{t\} = (M_1(t), M_2(t), M_3(t)), \quad t \in I.$$

On dit alors que \mathcal{C} est une courbe paramétrée par M . La notion de point ordinaire est identique au cas du plan, à savoir qu'un point $M(t)$ est dit ordinaire si et seulement si

$$M'(t) = (M'_1(t), M'_2(t), M'_3(t)) \neq (0, 0, 0).$$

Pour un point ordinaire $M(t)$ les vecteurs tangents en $M(t)$ à la courbe sont les vecteurs non nuls colinéaires à $M'(t)$, et la droite tangente se définie comme en dimension deux. Il en est de même de la notion de longueur, ou de paramétrage naturel.

5.4 Surfaces paramétrées dans \mathbb{R}^3

La définition des surfaces paramétrées de \mathbb{R}^3 s'inspire de celle des courbes paramétrées, à la différence notable qu'elles ne sont pas paramétrées par des intervalles, mais par des domaines de \mathbb{R}^2 .

Soit donc Ω un domaine de \mathbb{R}^2 et soit $M = (M_1, M_2, M_3)$ une application de Ω dans \mathbb{R}^3

$$\vec{M} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u_1, u_2) \mapsto (M_1(u_1, u_2), M_2(u_1, u_2), M_3(u_1, u_2)) \quad \text{pour } (u_1, u_2) \in \Omega.$$

La surface paramétrée \mathcal{S} est l'image de Ω par M , c'est à dire l'ensemble

$$\mathcal{S} = \{(M_1(u_1, u_2), M_2(u_1, u_2), M_3(u_1, u_2)) \mid (u_1, u_2) \in \Omega\}.$$

Nous supposerons de plus que les applications M_1, M_2, M_3 sont dérivables de dérivées continues. Posons alors

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{M}}{\partial u_1} = \left(\frac{\partial M_1}{\partial u_1}, \frac{\partial M_2}{\partial u_1}, \frac{\partial M_3}{\partial u_1} \right) \\ \text{et} \\ \frac{\partial \vec{M}}{\partial u_2} = \left(\frac{\partial M_1}{\partial u_2}, \frac{\partial M_2}{\partial u_2}, \frac{\partial M_3}{\partial u_2} \right). \end{cases} \quad (5.4)$$

Ces deux vecteurs sont tangents à la surface \mathcal{S} au point \vec{M} . Le vecteur

$$\vec{m} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial u_2}$$

est orthogonal à la surface \mathcal{S} au point M . Nous supposerons dans toute la suite qu'il n'est pas nul.¹ Posons

$$\vec{n} = \frac{\vec{m}}{\|\vec{m}\|} = \frac{\frac{\partial \vec{M}}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial u_2}}{\left\| \frac{\partial \vec{M}}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial u_2} \right\|}.$$

Le vecteur \vec{n} est un vecteur unitaire, car

$$\|\vec{n}\| = 1$$

et de plus il est orthogonal à la surface. Ce vecteur dépend du point $\vec{M}(u_1, u_2)$ de manière continue. Nous dirons que la surface \mathcal{S} est *orientée* suivant le vecteur \vec{n} .²

Remarque 2. Pour changer l'orientation, il faut changer \vec{n} en $-\vec{n}$, et donc définir un nouveau paramétrage. Par exemple, pour le faire, on peut permute les variables u_1 , et u_2 , de sorte que la surface est paramétrée par (u_2, u_1) .

On appelle plan tangent en $M(u_1, u_2)$ le plan affine passant par $M(u_1, u_2)$ et parallèle au sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $\frac{\partial \vec{M}}{\partial u_1}$ et $\frac{\partial \vec{M}}{\partial u_2}$. Il est donc orthogonal au vecteur \vec{n} au point M . On a donc

Proposition 7. Soit $M_0 = M((u_1^0, u_2^0)) \equiv (M_1^0, M_2^0, M_3^0)$ un point de \mathcal{S} . Soit \vec{m}_0 et \vec{n}_0 les vecteurs orthogonaux associés comme ci-dessus. alors le plan tangent en M_0 admet pour équation

$$(x_1 - M_1^0, x_2 - M_2^0, x_3 - M_3^0) \cdot \vec{m}_0 = 0$$

ou encore

$$(x_1 - M_1^0, x_2 - M_2^0, x_3 - M_3^0) \cdot \vec{n}_0 = 0$$

Exemple 1. Soit \vec{e}_1 et \vec{e}_2 deux vecteurs de \mathbb{R}^3 , non colinéaires, et soit \vec{b} un vecteur quelconque de \mathbb{R}^3 . Alors, l'ensemble

$$\mathcal{S} = \{s\vec{e}_1 + t\vec{e}_2 + \vec{b}, s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}\}$$

est bien une surface paramétrée, il s'agit du plan affine passant par \vec{b} , et dont le plan directeur est engendré par les vecteurs \vec{e}_1 et \vec{e}_2 . Son plan tangent est identique à lui-même.

Le cas des graphes. Un exemple de surface paramétrée de \mathbb{R}^3 est fourni par le *graphe* d'une fonction f du domaine Ω de \mathbb{R}^2 vers \mathbb{R} . Un paramétrage est alors donné par l'application

$$M: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3, (x_1, x_2) \mapsto M(x_1, x_2) = (x_1, x_2, f(x_1, x_2)).$$

On a

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{M}}{\partial x_1} = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2)\right) \\ \frac{\partial \vec{M}}{\partial x_2} = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2)\right), \end{cases}$$

1. cette condition pour les surfaces est l'équivalent de celle de *point ordinaire* pour les courbes
 2. On peut imaginer que \vec{n} indique le côté où se trouve par rapport à la surface

de sorte que

$$\vec{m} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial x_2} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x_1}, -\frac{\partial f}{\partial x_2}, 1 \right),$$

et

$$\vec{n} = \left(-\frac{f_{x_1}}{\sqrt{1 + f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2}}, -\frac{f_{x_2}}{\sqrt{1 + f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2}} \right).$$

Exemple 2. Considérons

$$\mathcal{S}_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, x_1 + x_2 + x_3 = 4, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\}$$

et vérifions que \mathcal{S}_1 est une portion du graphe d'une fonction f que nous préciserons. On voit tout d'abord que de la relation $x_1 + x_2 + x_3 = 4$, on peut déduire une expression explicite de x_3 en fonction des variables x_1 et x_2 à savoir $x_3 = 4 - x_1 - x_2$, ou encore $x_3 = f(x_1, x_2)$ où on a défini la fonction f de \mathbb{R}^2 vers \mathbb{R} par

$$f(x_1, x_2) = 4 - x_1 - x_2.$$

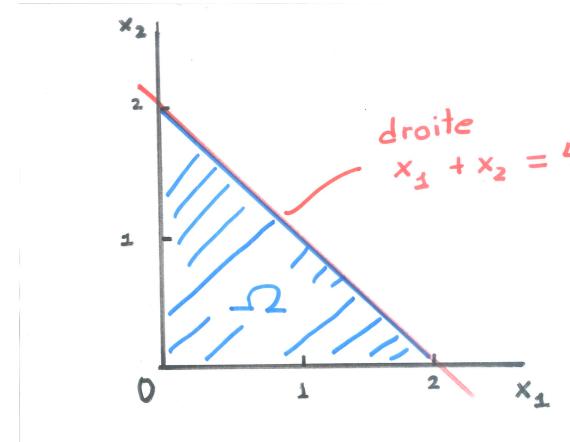
On a donc

$$\mathcal{S}_1 = \{(x_1, x_2, f(x_1, x_2)), x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \text{ et } f(x_1, x_2)\} = \{(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) | (x_1, x_2) \in \Omega\},$$

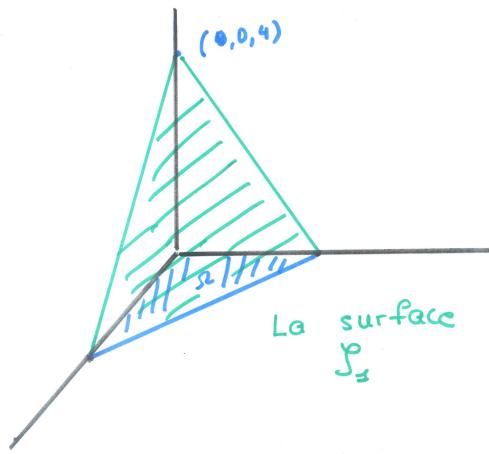
où Ω est le domaine de \mathbb{R}^2 défini par $\Omega = \{(x_1, x_2) | x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \text{ et } f(x_1, x_2) \geq 0\}$, c'est à dire

$$\Omega = \{(x_1, x_2), x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 4\}. \quad (5.5)$$

La surface \mathcal{S}_1 est donc le graphe de la fonction f restreinte au domaine Ω , qui est l'intersection des demi-plans $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ et $x_1 + x_2 \leq 4$, dont les frontières sont respectivement les droites $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ et $x_1 + x_2 = 4$, cette dernière droite étant tracée en reliant les points $(4, 0)$ et $(0, 4)$ du plan Ox_1x_2 .



La surface \mathcal{S}_1 est alors la portion de plan affine passant par les points $(0, 0, 4)$, $(0, 4, 0)$, $(4, 0, 0)$.



On a $\overrightarrow{\text{grad}} f = (-1, -1)$, donc un vecteur normal à la surface au point $\vec{M}(x_1, x_2)$ est donné par $\vec{m} = (1, 1, 1)$, et un vecteur unitaire normal par

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1).$$

Exemple 3. Un autre exemple est fourni par la projection stéréographique, qui est un moyen utilisé pour cartographier la sphère privée du pôle nord. Considérons la sphère unité de \mathbb{R}^3 définie par

$$\mathcal{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Soit P le plan $Ox_1 x_2$, qui est donc un plan équatorial de la sphère \mathcal{S}^2 . Pour $U = (u_1, u_2)$ considérons le point $M = M(u_1, u_2)$, intersection de \mathcal{S}^2 et de la droite UN , où $N = (0, 0, 1)$ désigne le pôle nord. A chaque point (u_1, u_2) du plan P correspond un unique point de $\mathcal{S}^2 \setminus \{N\}$, et l'application

$$M : P \rightarrow \mathcal{S}^2 \setminus \{N\}, (u_1, u_2) \mapsto M(u_1, u_2)$$

est bien un paramétrage de $\mathcal{S}^2 \setminus \{N\}$. On peut d'ailleurs l'expliciter comme

$$M(u_1, u_2) = \left(\frac{2u_1}{1+u_1^2+u_2^2}, \frac{2u_2}{1+u_1^2+u_2^2}, \frac{1-u_1^2-u_2^2}{1+u_1^2+u_2^2} \right).$$

Remarque 3. Pour une surface donnée \mathcal{S} , on peut parfois avoir à diviser \mathcal{S} en plusieurs morceaux, dont chacun est une surface paramétrée au sens précédent.

5.5 Le théorème des fonctions implicites

Les surfaces de \mathbb{R}^3 peuvent aussi être définies comme l'ensemble des solutions d'une équation. Soit F une fonction sur \mathbb{R}^3 définie sur un domaine \mathcal{D} . Considérons l'ensemble

$$\mathcal{S} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } F(x_1, x_2, x_3) = 0\}. \quad (5.6)$$

Soit $M = (m_1, m_2, m_3)$ un point de \mathcal{S} tel que les dérivées partielles de F soient continues près de M . Nous allons voir que

Théorème 3. Soit $M = (m_1, m_2, m_3)$ un point de \mathcal{S} tel que

$$\overrightarrow{\text{grad}}F(M) \neq \vec{0}.$$

Alors localement près de M , S est une surface paramétrée. De plus, un vecteur orthogonal à S en M est donnée par $\overrightarrow{\text{grad}}f(M)$ et un vecteur orthonormal unitaire par

$$\vec{n} = \frac{\overrightarrow{\text{grad}}F(M)}{\|\overrightarrow{\text{grad}}F(M)\|}.$$

Par ailleurs l'équation du plan tangent en M a la forme simple suivante

$$f_{x_1}(M)(x_1 - m_1) + f_{x_2}(M)(x_2 - m_2) + f_{x_3}(M)(x_3 - m_3) = 0. \quad (5.7)$$

Retenons donc que les vecteurs orthogonaux ainsi qu'une équation d'un plan tangent sont particulièrement simples à établir lorsque la surface est donnée sous forme d'équation (5.6).

La preuve du Théorème (3) repose, comme en dimension 2, sur le théorème des *fonctions implicites*, dont voici un énoncé

Théorème 4. Soit $M = (m_1, m_2, m_3)$ un point de \mathcal{S} tel que les dérivées partielles de F soient continues près de M . On suppose de plus que

$$\frac{\partial F}{\partial x_3}(M) \neq 0. \quad (5.8)$$

Alors il existe un voisinage \mathcal{U} de $M = (m_1, m_2)$ dans \mathbb{R}^2 et une fonction $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$\varphi(m_1, m_2) = m_3 \text{ et } F(x_1, x_2, \varphi(x_1, x_2)) = 0.$$

Il en résulte que près de M , \mathcal{S} peut alors se représenter comme le graphe d'une fonction. Un calcul similaire à celui effectué en dimension 2 montre alors que les dérivées partielles de φ se calculent comme suit :

$$\begin{cases} \varphi_{x_1}(x_1, x_2) = \frac{F'_{x_1}(x_1, x_2, \varphi(x_1, x_2))}{F'_{x_3}(x_1, x_2, \varphi(x_1, x_2))} \\ \text{et} \\ \varphi_{x_2}(x_1, x_2) = \frac{F'_{x_2}(x_1, x_2, \varphi(x_1, x_2))}{F'_{x_3}(x_1, x_2, \varphi(x_1, x_2))}. \end{cases} \quad (5.9)$$

Exemple 4. Soit

$$\mathcal{S} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = b\}$$

où a_1, a_2, a_3 et b sont des nombres réels donnés, tels que $(a_1, a_2, a_3) \neq \vec{0}$. Ici la fonction F est donnée par

$$F(x_1, x_2, x_3) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 - b,$$

de sorte que $\overrightarrow{\text{grad}}F = (a_1, a_2, a_3) \neq \vec{0}$. La surface obtenue est ici un plan affine, dont le plan tangent est identique à elle-même en tout point, et un vecteur normal est (a_1, a_2, a_3) .

Exemple 5. Le graphe d'une fonction f d'un domaine \mathcal{D} de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} est donnée par une équation. Si

$$\Gamma_f = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, (x_1, x_2) \in \mathcal{D}, x_3 = f(x_1, x_2), x_3 = f(x_1, x_2)\}$$

est le graphe de f alors

$$\Gamma_f = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, F(x_1, x_2, x_3) = 0\}$$

où la fonction F est définie de $\mathcal{D} \times \mathbb{R}$ vers \mathbb{R} par

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_3 - f(x_1, x_2).$$

On a alors

$$\overrightarrow{\text{grad}} F(x_1, x_2, x_3) = (-f'_{x_1}(x_1, x_2), -f'_{x_2}(x_1, x_2), 1).$$

de sorte qu'un vecteur unitaire orthogonal au graph de f est donné par

$$\vec{n} = \left(-\frac{f'_{x_1}}{\sqrt{1 + f'_{x_1}^2 + f'_{x_2}^2}}, -\frac{f'_{x_2}}{\sqrt{1 + f'_{x_1}^2 + f'_{x_2}^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + f'_{x_1}^2 + f'_{x_2}^2}} \right).$$

L'équation du plan affine tangent au graphe en (m_1, m_2, m_3) avec $m_3 = f(m_1, m_2)$ est alors donnée par

$$-f'_{x_1}(m_1, m_2)(x_1 - m_1) - f'_{x_2}(m_1, m_2)(x_2 - m_2) + (x_3 - m_3) = 0.$$

Exemple 6. Considérons l'ellipsoïde d'équation

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1,$$

où a_1, a_2 et a_3 sont des réels non nuls. Un vecteur orthogonal au point $M = (m_1, m_2, m_3)$ est donné par

$$\overrightarrow{\text{grad}} F(m_1, m_2, m_3) = \left(\frac{2m_1}{a_1^2}, \frac{2m_2}{a_2^2}, \frac{2m_3}{a_3^2} \right).$$

L'équation du plan tangent en (m_1, m_2, m_3) est alors donnée par

$$\frac{m_1}{a_1^2}(x_1 - m_1) + \frac{m_2}{a_2^2}(x_2 - m_2) + \frac{m_3}{a_3^2}(x_3 - m_3) = 0 \text{ où } (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

5.5.1 Aire d'une surface

Considérons une surface \mathcal{S} paramétrée par une fonction

$$M : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3, U = (u_1, u_2) \mapsto M(U).$$

Considérons U un point quelconque de Ω , et un rectangle élémentaire \mathcal{R} de cotés Δu_1 et Δu_2 , dont un des sommets est U . L'image par M de ce rectangle est proche, au premier ordre, d'un parallélogramme dont les cotés sont donnés par les deux vecteurs $\Delta u_1 \frac{\partial \vec{M}}{\partial u_1}$ et $\Delta u_2 \frac{\partial \vec{M}}{\partial u_2}$. On a donc, en invoquant la Proposition 3

$$\mathcal{A}\text{ire}(M(\mathcal{R})) \simeq \Delta u_1 \Delta u_2 \left\| \frac{\partial \vec{M}}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial u_2} \right\|.$$

Il en résulte que si on divise Ω en petites rectangles de cotés Δu_1 et Δu_2 , que l'on somme sur tous les rectangles, et enfin que l'on fait tendre Δu_1 et Δu_2 vers zéro, alors on obtient l'aire de la surface, c'est à dire

$$\mathcal{A}ire(\mathcal{S}) = \iint_{\Omega} \left\| \frac{\partial \vec{M}}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial u_2} \right\| du_1 du_2. \quad (5.10)$$

On vérifie ensuite que cette formule est indépendante du paramétrage choisi. Lorsque l'on a besoin de diviser \mathcal{S} en plusieurs morceaux pour pouvoir la paramétriser, on fait alors la somme des aires des différents morceaux.

Le cas des graphes. Si la surface est décrite sous forme de graphe d'une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ comme ci-dessus, alors

$$\mathcal{A}ire(\mathcal{S}) = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2} dx_1 dx_2.$$

Exemple 7. Considérons de nouveau la surface \mathcal{S}_1 définie dans l'exemple 2 $\mathcal{S}_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x_1 + x_2 + x_3 = 4, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, X_3 \geq 0\}$. Nous avons vu qu'il s'agit du graphe de la fonction $f(x_1, x_2) = 4 - x_1 - x_2$ pour le domaine Ω défini en (5.5). On a

$$\sqrt{1 + f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2} = \sqrt{3}, \text{ d'où}$$

$$\mathcal{A}ire(\mathcal{S}_1) = \iint_{\Omega} \sqrt{3} dx_1 dx_2.$$

On peut calculer cette intégrale en utilisant le théorème de Fubini,

$$\mathcal{A}ire(\mathcal{S}_1) = \sqrt{3} \int_0^4 \left(\int_0^{4-x_1} dx_2 \right) dx_1 = \sqrt{3} \int_0^4 (4 - x_1) dx_1 = -\sqrt{3} \left[\frac{(4 - x_1)^2}{2} \right]_0^4 = 8\sqrt{3}.$$

5.5.2 Intégration sur les surfaces

Considérons une surface \mathcal{S} paramétrée par une fonction $M(U) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, et f une fonction définie sur \mathcal{S} . Posons

$$I = \iint_{\Omega} f(M(u_1, u_2)) \left\| \frac{\partial \vec{M}}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial u_2} \right\| du_1 du_2.$$

la valeur I est appelée intégrale de f sur \mathcal{S} . On vérifie que cette quantité est indépendante du paramétrage choisi. On la note souvent

$$I = \iint_{\mathcal{S}} f d\sigma,$$

où $d\sigma$ désigne l'élément d'aire élémentaire sur \mathcal{S} . La valeur calculée ici ne tient pas compte de l'orientation.

Exemple 8. Calculons $I_1 = \iint_{\mathcal{S}_1} x_1^2 d\sigma$, où S_1 est la portion de surface définie dans l'exemple 2. On trouve, en utilisant le théorème de Fubini

$$\begin{aligned} I_1 &= \sqrt{3} \iint_{\Omega} \sqrt{3} x_1^2 dx_1 dx_2 \\ &= \sqrt{3} \int_0^4 \left(\int_0^{4-x_1} x_1^2 dx_2 \right) dx_1 = \sqrt{3} \int_0^4 (4 - x_1) x_1^2 dx_1 \\ &= \sqrt{3} \left[\frac{4}{3} x_1^3 - \frac{1}{4} x_1^4 \right]_0^4 = \sqrt{3} \left(\frac{4}{3} 64 - 64 \right) = \frac{6}{4} 3\sqrt{3} = \frac{64}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

5.6 Intégrales triples

5.6.1 Construction

Les intégrales de fonctions à trois variables se définissent de manière similaire à celui du cas de deux variables. Soit \mathcal{D} un domaine de \mathbb{R}^3 limité par une surface \mathcal{S} . Soit f une fonction continue sur \mathcal{D} avec son bord. On divise l'espace \mathbb{R}^3 en petits parallélépipèdes rectangles $\mathcal{R}_{i,j,k}$ de taille $\Delta x_1 \times \Delta x_2 \times \Delta x_3$ parallèles aux axes Ox_1 , Ox_2 et Ox_3 . On considère les parallélépipèdes $\mathcal{R}_{i,j,k}$ contenus dans \mathcal{D} . Notons $M_{i,j,k}$ le centre de $\mathcal{R}_{i,j,k}$. Considérons la somme

$$\sum \sum \sum f(M_{i,j,k}) \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3.$$

Notons que $\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$ représente la mesure du volume de $\mathcal{R}_{i,j,k}$. Nous admettons la propriété suivante : Lorsque Δx_1 , Δx_2 et Δx_3 tendent vers 0, la somme ci-dessus converge vers une quantité que nous noterons

$$I = \iiint_{\mathcal{D}} f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3.$$

Définition 3. On appelle I l'intégrale triple de la fonction f sur le domaine \mathcal{D} .

Notons que pour $f = 1$, on obtient la mesure du volume de \mathcal{D} , c'est à dire

$$\text{Vol}(D) = \iiint_{\mathcal{D}} dx_1 dx_2 dx_3.$$

On alors les propriétés suivantes.

Proposition 8. On a pour un domaine \mathcal{D} fixé

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathcal{D}} (f_1 + f_2)(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 &= \iiint_{\mathcal{D}} f_1(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 + \iiint_{\mathcal{D}} f_2(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 \\ \iiint_{\mathcal{D}} (\lambda f_1)(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 &= \lambda \iiint_{\mathcal{D}} f_1(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3. \end{aligned}$$

Si l'on divise \mathcal{D} en deux domaines \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 alors

$$\iiint_{\mathcal{D}} f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = \iiint_{\mathcal{D}_1} f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 + \iiint_{\mathcal{D}_2} f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3.$$

5.6.2 Le Théorème de Fubini

Il permet de ramener des calculs d'intégrales triples à des intégrales doubles.

Soit un domaine \mathcal{D} sur lequel on désire intégrer une fonction. On suppose par ailleurs que si x_3 prend des valeurs dans un intervalle $[c_0, c_1]$, c'est à dire que

$$\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \times [c_0, c_1].$$

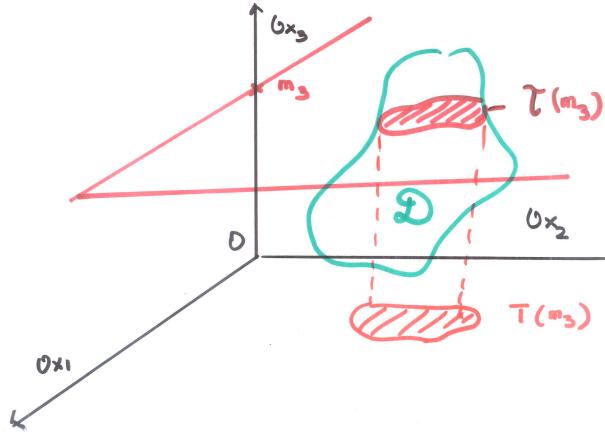
Pour chaque nombre m_3 fixé, on suppose que (x_1, x_2) varie dans un domaine $T(x_3)$ de \mathbb{R}^2 , où

$$T(m_3) = \{(x_1, x_2) \text{ tels que } (x_1, x_2, m_3) \in \mathcal{D}\}$$

de sorte que $\mathcal{T}(m_3) \equiv \{(x_1, x_2, m_3) \text{ tels que } (x_1, x_2) \in T(m_3)\} = \mathcal{D} \cap \{(x_1, x_2, m_3)\}$. On a alors

Théorème 5. On a l'identité

$$\iiint f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{c_0}^{c_1} \left(\iint_{T(x_3)} f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 \right) dx_3.$$



Remarque 4. La quantité entre parenthèses dans le membre de droite est bien une fonction qui ne dépend que de la variable x_3 par l'intermédiaire de f et du domaine d'intégration $T(x_3)$:

$$\iint_{T(x_3)} f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2$$

Pour calculer une telle intégrale double, on peut appliquer de nouveau le théorème de Fubini pour le cas de deux variables.

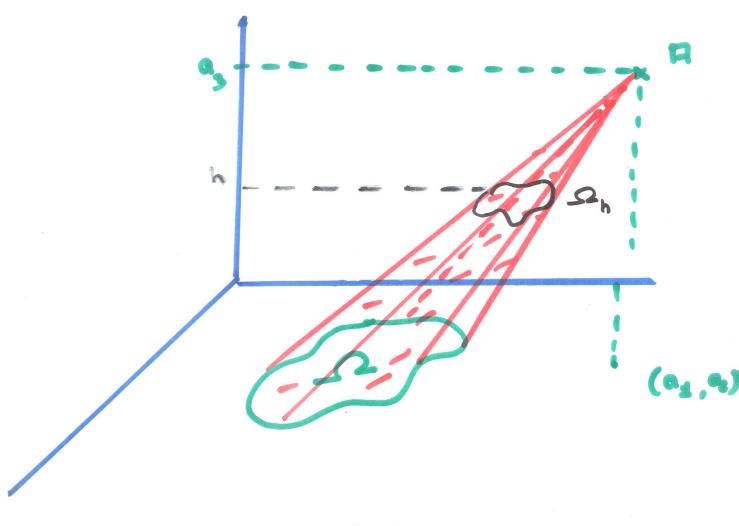
Remarque 5. Bien entendu les variables x_1 , x_2 et x_3 jouent des rôles équivalents.

Donnons une autre version du Théorème de Fubini. supposons que (x_1, x_2) varie dans un certain domaine Δ de \mathbb{R}^2 et pour chaque point (x_1, x_2) de Δ supposons que x_3 varie dans un intervalle $[\varphi(x_1, x_2), \psi(x_1, x_2)]$.

Théorème 6. On a

$$\iiint_{\mathcal{D}} f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = \iint_{\Delta} \left(\int_{\varphi(x_1, x_2)}^{\psi(x_1, x_2)} f(x_1, x_2, x_3) dx_3 \right) dx_1 dx_2.$$

Exemple 9. Calculons en utilisant le théorème de Fubini le volume d'un cône.



Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^2 = Ox_1x_2$, soit $A = (a_1, a_2, a_3)$ un point donné de \mathbb{R}^3 . On considère pour domaine \mathcal{D} le cône de sommet A de base Ω , c'est à dire l'ensemble suivant :

$$\mathcal{D} = \{X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } X \in [A, X'], \text{ où } X' \in Ox_1x_2 \text{ est un point de } \Omega\}.$$

Ici $[A, X']$ désigne le segment joignant A et X' . On désire calculer le volume de \mathcal{D} , c'est à dire l'intégrale triple

$$I = \text{Vol}(\mathcal{D}) = \iiint_{\mathcal{D}} dx_1 dx_2 dx_3.$$

En utilisant le théorème de Fubini a on donc

$$I = \int_0^{a_3} \left(\int_{\Omega_h} dx_1 dx_2 \right) dh = \int_0^{a_3} \mathcal{A}\text{ire}(\Omega_h) dh, \quad (5.11)$$

où $\Omega_h = \{(x_1^h, x_2^h) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } X_h = (x_1^h, x_2^h, h) \in \mathcal{D}\}$. Essayons maintenant de décrire ces tranches Ω_h . Soit $X_h = (x_1^h, x_2^h)$ un point quelconque de Ω , $M_h = (x_1^h, x_2^h, h) \in \mathcal{D}$. On a $\overrightarrow{AM}_h = (x_1^h - a_1, x_2^h - a_2, h - a_3)$. La droite D_h passant par A et M_h a donc pour forme

$$\begin{aligned} D_h &= \{(a_1 + s(x_1^h - a_1), a_2 + s(x_2^h - a_2), a_3 + s(h - a_3), s \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(1-s)a_1 + sx_1^h, (1-s)a_2 + sx_2^h, (1-s)a_3 + sh, s \in \mathbb{R}\}, \end{aligned}$$

Soit $\{A_h\}$ son intersection avec le plan Ox_1x_2 . Elle correspond à la valeur $s_0 = \frac{a_3}{a_3 - h}$ du paramètre qui annule la troisième coordonnée. On a donc par hypothèses $A_h \in \Omega$ et

$$\begin{aligned} A_h &= (1-s_0)a_1 + s_0x_1^h, (1-s_0)a_2 + s_0x_2^h, (1-s_0)a_3 + s_0h, \\ &= (1-s_0)\tilde{A} + s_0X_h \in \Omega \text{ par hypothèse.} \end{aligned}$$

Ω est donc l'image de Ω_h par l'application affine bijective de \mathbb{R}^2 vers \mathbb{R}^2 définie par

$$\Phi_h(X_h) = (1-s_0)\tilde{A} + s_0X_h, \text{ avec } \Phi_h(\Omega) = \Omega.$$

On a

$$D_{\Phi_h} = s_0 \text{Id}_{\mathbb{R}^2} \text{ et donc } |J_{\Phi_h}| = s_0^2 = \left(\frac{a_3}{a_3 - h} \right)^2.$$

Ainsi par la formule du changement de variable

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\text{ire}(\Omega) &= \iint_{\Omega} dx_1 dx_2 = \iint_{\Omega_h} |J_{\Phi_h}| dx_1 dx_2 \\ &= \left(\frac{a_3}{a_3 - h} \right)^2 \iint_{\Omega_h} dx_1 dx_2 = \left(\frac{a_3}{a_3 - h} \right)^2 \mathcal{A}\text{ire}(\Omega_h). \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\mathcal{A}\text{ire}(\Omega_h) = \left(1 - \frac{h}{a_3} \right)^2 \mathcal{A}\text{ire}(\Omega)$$

En revenant à (5.11) on trouve donc

$$I = \mathcal{A}\text{ire}(\Omega) \int_0^{a_3} \left(1 - \frac{h}{a_3} \right)^2 dh = -\frac{\mathcal{A}\text{ire}(\Omega)}{3a_3^2} [(a_3 - h)^3]_0^{a_3} = \frac{1}{3} a_3 \mathcal{A}\text{ire}(\Omega).$$

5.6.3 Changements de variables

La règle générale est analogue au cas à deux variables. Soit \mathcal{D} un domaine de \mathbb{R}^3 que l'on paramètre par un domaine Ω de \mathbb{R}^3 à l'aide d'une application $\Phi : \Omega \rightarrow \mathcal{D}$, $u = (u_1, u_2, u_3) \mapsto \Phi(u) = (\Phi_1(u), \Phi_2(u), \Phi_3(u)) = X = (x_1, x_2, x_3)$, bijective et dérivable de dérivées continues. On considère alors le Jacobien

$$J_\Phi = \begin{vmatrix} (\Phi_1)_{u_1} & (\Phi_1)_{u_2} & (\Phi_1)_{u_3} \\ (\Phi_2)_{u_1} & (\Phi_2)_{u_2} & (\Phi_2)_{u_3} \\ (\Phi_3)_{u_1} & (\Phi_3)_{u_2} & (\Phi_3)_{u_3} \end{vmatrix}$$

On le notera également

$$J_\Phi = \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(u_1, u_2, u_3)}.$$

On a alors

Théorème 7. *On a*

$$\iiint_{\mathcal{D}} f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = \iiint_{\Omega} f(\Phi(u_1, u_2, u_3)) |J_\Phi(u_1, u_2, u_3)| du_1 du_2 du_3.$$

Attention. Dans la formule précédente, on prend *la valeur absolue du Jacobien*.

Coordonnées cylindriques. Soit \mathcal{D} le cylindre de \mathbb{R}^3 défini par

$$x_1^2 + x_2^2 \leq R^2, \quad x_3 \in [c_0, c_1].$$

On effectue le changement de variable

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta, \quad x_3 = x_3.$$

Les nouvelles variables sont donc (r, θ, x_3) . Le domaine Ω est donné par

$$\Omega = \{(r, \theta, x_3), \text{ tels que } 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta < 2\pi, c_0 \leq x_3 \leq c_1\},$$

c'est à dire le parallélépipède $[0, R] \times [0, \pi] \times [c_0, c_1]$. L'application Φ s'écrit donc

$$\Phi_1 = r \sin \theta, \quad \Phi_2 = r \cos \theta, \quad \Phi_3 = x_3,$$

et le Jacobien de ce changement de variable est

$$J_\Phi = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

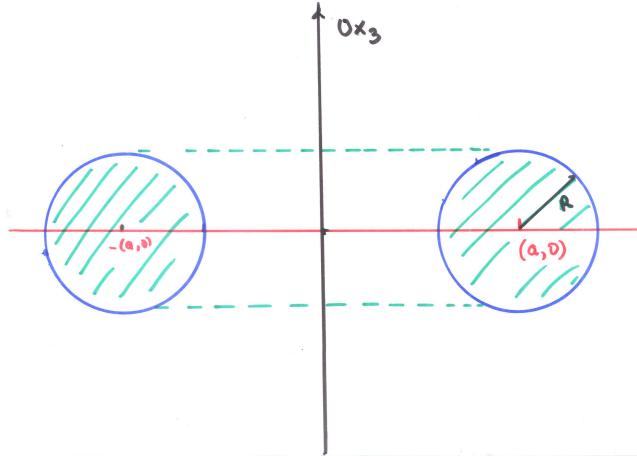
On a donc

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}} f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 &= \iiint_{\Omega} (f \circ \Phi)(r, \theta, x_3) r dr d\theta dx_3 \\ &= \iiint_{\Omega} f(r \cos \theta, r \sin \theta, x_3) r dr d\theta dx_3. \end{aligned}$$

Exemple 10. Calcul du volume d'un tore de révolution. On considère ici le domaine \mathcal{U} de \mathbb{R}^3 intérieur à un tore de révolution

$$\mathcal{U} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \text{ tels que } (r - a)^2 + x_3^2 \leq R^2\},$$

où $a > R > 0$ sont des constantes données, et où on a posé, comme ci-dessus $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Il s'agit donc du domaine engendré par la rotation autour de l'axe Ox_3 d'un cercle du plan Ox_1x_3 de centre $(a, 0)$ et de rayon R .



On désire donc calculer

$$\begin{aligned} I = \text{Vol}(\mathcal{U}) &= \iiint_{\mathcal{U}} dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= \iint_{D_R(a) \times [0, 2\pi]} r dr d\theta dx_3 = \int_0^{2\pi} \left(\iint_{D_R(a)} dr dx_3 \right) d\theta \\ &= 2\pi \iint_{D_R(a)} r dr dx_3 = 2\pi J(a, R) \end{aligned}$$

où

$$J(a, R) = \iint_{D_R(a)} r dr dx_3.$$

et où $D_r(a)$ désigne le disque de centre a et de rayon R c'est à dire

$$D_R(a) = \{(r, x_3) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } (r - a)^2 + x_3^2 \leq R^2\}.$$

Il reste donc à calculer l'intégrale double $J(a, R)$. On remarque tout d'abord que

$$\iint_{D_R(a)} (r - a) dr dx_3 = 0,$$

car le domaine $D_R(a)$ est symétrique par rapport à verticale passant par $(a, 0)$ et $r - a$ impaire par rapport à cet axe. On a donc

$$J(a, R) = a \iint_{D_R(a)} dr dx_3 = a\pi R^2.$$

le volume de l'intérieur du tore de révolution est donc

$$\text{Vol}(\mathcal{U}) = 2\pi^2 a R^2.$$

Exemple 11. Calcul de la surface d'un tore de tore de révolution. On considère ici la surface \mathcal{T} de \mathbb{R}^3

$$\mathcal{T} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \text{ tels que } (r - a)^2 + x_3^2 \leq R^2\},$$

où $a > R > 0$ sont des constantes données, et où on a posé $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Cette surface est un tore de révolution. On désire calculer l'aire de \mathcal{T} : à cet effet introduisons un paramétrage de \mathcal{T} . On commence par paramétriser le cercle $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x - a)^2 + y^2 \leq R^2\}$ par exemple par un angle α , c'est à dire on considère l'application de $[0, 2\pi]$ à valeurs dans \mathbb{R}^2 définie par

$$\vec{N}(\alpha) = (N_1(\alpha), N_2(\alpha)) = (a + R \cos \alpha, R \sin \alpha).$$

On en déduit le paramétrage $\vec{M} : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^3$ défini par

$$\vec{M}(\theta, \alpha) = (N_1(\alpha) \cos \theta, N_1(\alpha) \sin \theta, N_2(\alpha)) = ((a + R \cos \alpha) \cos \theta, (a + R \cos \alpha) \sin \theta, R \sin \alpha).$$

On a alors

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta} = (-(a + R \cos \alpha) \sin \theta, (a + R \cos \alpha) \cos \theta, 0) \\ \frac{\partial \vec{M}}{\partial \alpha} = (-R \sin \alpha \cos \theta, -R \sin \alpha \sin \theta, R \cos \alpha) \end{cases}$$

et un rapide calcul donne

$$\left\| \frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial \alpha} \right\| = R(a + R \cos \alpha)$$

Il vient ainsi

$$\begin{aligned} \mathcal{Aire}(\mathcal{T}) &= \iint_{[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]} R(a + R \cos \alpha) d\theta d\alpha = R \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} (a + R \cos \alpha) d\alpha \right) d\theta \\ &= 4\pi^2 Ra. \end{aligned}$$

Remarque 6. Les coordonnées sont particulièrement utiles en présence de certaines symétries, comme la symétrie cylindrique. Par exemple, si une fonction f possède la symétrie radiale, c'est à dire si il existe une fonction \tilde{f} de $[0, R] \times [c_0, c_1]$ à valeurs dans \mathbb{R} telle que

$$f(x_1, x_2, x_3) = \tilde{f}(r, x_3), \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

On a alors

$$I = \iiint_{B_R} f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = \iiint_{[0, R] \times [0, 2\pi] \times [c_0, c_1]} \tilde{f}(r, x_3) r dr d\theta dx_3$$

En utilisant le théorème de Fubini, il vient

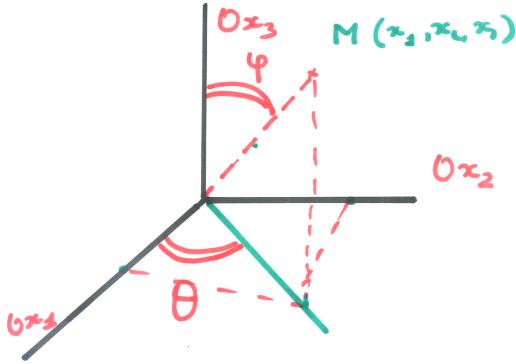
$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \left(\iint_{[0, R] \times [c_0, c_1]} \tilde{f}(r, x_3) r dr dx_3 \right) d\theta \\ &= 2\pi \iint_{[0, R] \times [0, 2\pi]} \tilde{f}(r, x_3) r dr d\theta \end{aligned}$$

Coordonnées sphériques. On considère ici comme domaine la boule $\mathcal{D} = B_R$ où B_R désigne la boule de centre 0 et de rayon R , dont l'équation est donnée par

$$B_R = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \text{ tels que } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq R^2\}.$$

On effectue alors le changement de variable

$$x_1 = r \sin \varphi \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \varphi \sin \theta, \quad x_3 = r \cos \varphi.$$



Les nouvelles variables sont donc (r, θ, φ) . Le domaine Ω est ici donné par

$$\Omega = \{(r, \theta, \varphi), 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta < 2\pi, 0 < \varphi \leq \pi\},$$

c'est à dire Ω est le parallélépipède $[0, R] \times [0, 2\pi[\times [0, \pi[$. On a

$$J_\phi = \begin{vmatrix} \sin \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi & 0 & -r \sin \varphi \end{vmatrix} = -r^2 \sin \varphi.$$

On a donc

$$\iiint_{\mathcal{D}} f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = \iiint_{\Omega} f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi.$$

Ici la valeur absolue du Jacobien est égale à $r^2 \sin \varphi$, car $\sin \varphi \geq 0$ (puisque $0 \leq \varphi \leq \pi$).

Remarque 7. Les coordonnées sphériques sont particulièrement utiles en présence de certaines symétries, comme la symétrie radiale. Par exemple, si une fonction f possède la symétrie radiale, c'est à dire si il existe une fonction \tilde{f} de $[0, R]$ à valeurs dans \mathbb{R} telle que

$$f(x_1, x_2, x_3) = \tilde{f}(r), \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

On a alors

$$I = \iiint_{B_R} f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = \iiint_{[0, R] \times [0, 2\pi[\times [0, \pi[} \tilde{f}(r) r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi$$

En utilisant le théorème de Fubini, il vient

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi \left(\iint_{[0, R] \times [0, 2\pi]} \tilde{f}(r) r^2 dr d\theta \right) \sin \varphi d\varphi \\ &= \left(\iint_{[0, R] \times [0, 2\pi]} \tilde{f}(r) dr d\theta \right) \left(\int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \right) \\ &= 2 \iint_{[0, R] \times [0, 2\pi]} \tilde{f}(r) r^2 dr d\theta \\ &= 4\pi \int_0^R \tilde{f}(r) r^2 dr. \end{aligned}$$

par exemple, si on prend pour $f = 1$, alors $\tilde{f} = 1$, et on retrouve le calcul du volume de la sphère, à savoir

$$\text{vol } B(R) = \iiint_{B_R} dx_1 dx_2 dx_3 = 4\pi \int_0^R r^2 dr = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Exemple 12. Les coordonnées sphériques peuvent aussi être utiles pour paramétriser certaines portions de sphères comme le montre l'exemple ci-dessous. Soit

$$\mathcal{S}_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}.$$

On voit que la surface \mathcal{S}^2 correspond à une partie de la sphère de rayon 2. En fait en coordonnées sphériques on a

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ 2 \sin \varphi \cos \theta, 2 \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi \mid \theta \in [0, \frac{\pi}{2}], \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}] \right\}.$$

On trouve donc, en utilisant les coordonnées sphériques, et en posant $\Omega_2 = (0, \frac{\pi}{2}) \times [0, \frac{\pi}{2}]$ le paramétrage $\vec{M} : \Omega_2 \rightarrow \mathcal{S}_2$ de \mathcal{S}_2

$$(\theta, \varphi) \mapsto M(\theta, \varphi) = (2 \sin \varphi \cos \theta, 2 \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi).$$

On peut utiliser ce paramétrage pour calculer l'intégrale

$$I_3 = \iint_{\mathcal{S}_2} x^2 y z d\sigma.$$

On a

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta} = (-2 \sin \theta \sin \varphi, 2 \cos \theta \sin \varphi, 0) \\ \frac{\partial \vec{M}}{\partial \varphi} = (2 \cos \theta \cos \varphi, 2 \sin \theta \cos \varphi, -2 \sin \varphi) \end{cases}$$

et donc

$$\left\| \frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial \varphi} \right\| = 4 \sin \varphi.$$

On a donc

$$\begin{aligned} I_2 &= \iint_{[0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]} (4 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi) (2 \sin \theta \sin \varphi) (2 \cos \varphi) (4 \sin \varphi) d\theta d\varphi \\ &= 64 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \varphi \cos \varphi d\varphi = 64 \left[-\frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\sin^5 \varphi}{5} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{64}{15}. \end{aligned}$$

5.7 Formule flux-divergence

La formule flux-divergence que nous avons vue au Chapitre 3 pour la dimension 2 s'étend au cas de la dimension trois. Si \vec{V} est un champ de vecteurs sur \mathbb{R}^3 dérivable, la divergence de $\vec{V} = (V_1, V_2, V_3)$ est la fonction scalaire définie par

$$\text{div } \vec{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial V_i}{\partial x_i}.$$

Si \mathcal{S} est une surface de \mathbb{R}^3 on définit le flux à travers cette surface comme l'intégrale

$$\text{Flux}(V, S) = \iint_{\mathcal{S}} \vec{V}(\sigma) \cdot \vec{n}(\sigma) d\sigma,$$

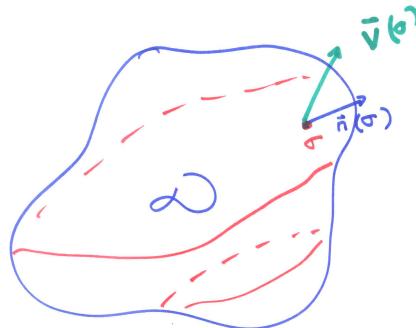
où $\vec{n}(\sigma)$ désigne un vecteur unitaire orthogonal à la surface en un point donné σ de cette surface. Bien entendu, une telle définition suppose un choix du vecteur unitaire : lorsque la surface est fermée, la convention est de prendre le vecteur unitaire orthogonal *sortant*. Le théorème *flux-divergence* s'énonce alors de la manière suivante : considérons un domaine \mathcal{D} de \mathbb{R}^3 dont la frontière \mathcal{S} est une surface paramétrée. On a

Théorème 8. Soit \vec{V} un champ de vecteurs continu ainsi que ses dérivées sur \mathcal{D} avec sa frontière \mathcal{S} . On a l'égalité

$$\iiint_{\mathcal{D}} \operatorname{div} V(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = \text{Flux}(V, S) = \iint_{\mathcal{S}} \vec{V}(\sigma) \cdot \vec{n}(\sigma) d\sigma,$$

où l'orientation est choisie de sorte que \vec{n} est dirigé vers l'extérieur de \mathcal{D} .

On peut obtenir ces résultats en étendant à la dimension trois l'interprétation qui est fournie de la formule flux-divergence en dimension deux dans la Section 4.3.2.



Exercices

Exercice I

On considère l'application Φ de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 définie par

$$\Phi(u_1, u_2, u_3) = (a_1 u_1, a_2 u_2, a_3 u_3),$$

où a_1, a_2 et a_3 sont des nombres réels donnés.

a) Montrer que l'image de la boule B_1 est données par l'ellipsoide \mathcal{E} défini par l'équation

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} < 1.$$

b) En déduire $\operatorname{vol} \mathcal{E}$.

Exercice II

Théorème de Guldin

A) On considère un domaine borné Ω du plan Ox_1x_3 inclus dans le demi-plan $x_1 \geq 0$.

1) Montrer qu'il existe un point et un seul $A = (a_1, a_3)$ de ce plan tel que

$$\iint_{\Omega} (x_i - a_i) dx_1 dx_3 = 0 \text{ pour } i = 1 \text{ et } i = 3.$$

On appelle ce point le centre de gravité de Ω .

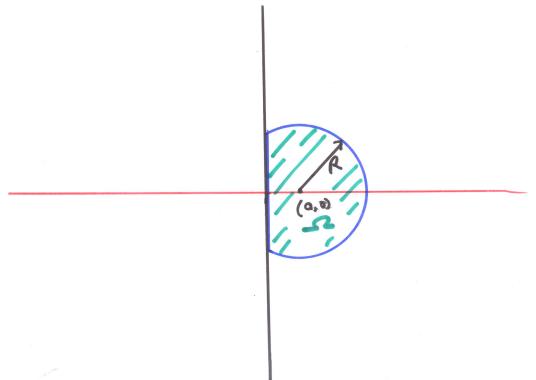
2) On considère le volume \mathcal{U} engendré par la rotation de Ω autour de l'axe Ox_3 , c'est à dire

$$\mathcal{U}_{\Omega} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } (r, x_3) \in \Omega\},$$

où on a posé $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Montrer que $\text{Vol}(\mathcal{U}_{\Omega}) = 2\pi a_1 \mathcal{A}\text{ire}(\Omega)$.

B) On considère dans cette question le domaine Ω défini pour $R > a > 0$ par

$$\Omega = \{(x_1, x_3) \in \mathbb{R}^2, x_1 \geq 0 \text{ et } (x_1 - a)^2 + x_3^2 \leq R^2\}.$$



1) Calculer l'aire de Ω ainsi que l'intégrale $I = \iint_{\Omega} x_1 dx_1 dx_3$.

1) en déduire que les coordonnées du gravité de Ω .

2) Calculer la valeur de $\text{Vol}(\mathcal{U}_{\Omega})$ dans le cas considéré.

Exercice III

Surface de révolution

On considère ici une surface engendrée par la rotation d'une courbe fermée autour d'un axe. Soit \mathcal{C} une courbe paramétrée de \mathbb{R}^2 ,

$$\mathcal{C} = \{\vec{N}(s), s \in I\},$$

où $\vec{N} = (N_1, N_2)$ est une application de I vers \mathbb{R}^2 , où I désigne un intervalle de \mathbb{R} . On Considère

$$\mathcal{S} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } (r, x_3) \in \mathcal{C}\},$$

où $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

1) Montrer que l'application $M : [0, 2\pi] \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie pour $\theta \in [0, 2\pi[$ et $s \in I$ par

$$\vec{M}(\theta, s) = (N_1(s) \cos \theta, N_1(s) \sin \theta, N_2(s))$$

est un paramétrage de \mathcal{S} .

2) Montrer que

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta} = (-N_1(s) \sin \theta, N_1(s) \cos \theta, 0) \\ \frac{\partial \vec{M}}{\partial s} = \left(\frac{dN_1}{ds}(s) \cos \theta, \frac{dN_1}{ds}(s) \sin \theta, \frac{dN_2}{ds}(s) \right). \end{cases}$$

Vérifier que ces deux vecteurs sont orthogonaux.

3) Montrer que

$$\left\| \frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial s} \right\| = |N_1(\theta)| \left\| \frac{d\vec{N}}{ds} \right\|.$$

4) Montrer que

$$\text{Aire}(\mathcal{S}) = 2\pi \int_I N_1(s) dl.$$

Chapitre 6

Le rotationnel

6.1 Champ de vecteurs, champs de gradient

Les champs de vecteurs sur \mathbb{R}^3 se définissent comme en dimension deux, c'est à dire il s'agit d'applications $\vec{V} = (V_1, V_2, V_3)$ d'un domaine \mathcal{D} de \mathbb{R}^3 à valeurs dans \mathbb{R}^3 . Si \mathcal{C} est une courbe orientée dans \mathbb{R}^3 paramétrée sur un intervalle I par une application $M : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $t \mapsto M(t)$ pour $t \in I$, on peut définir la circulation de \vec{V} comme en dimension deux par la formule

$$\int_I \vec{V}(M(t)) \cdot \vec{M}'(t) dt.$$

que l'on note

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{V}(M) d\vec{M}.$$

Si f est une fonction dérivable sur \mathbb{R}^3 , alors son gradient est défini par

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right).$$

Si \widehat{AB} est une courbe orientée, on a alors, comme en dimension deux

$$\int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{\text{grad}} f(M) d\vec{M} = f(B) - f(A).$$

Comme en dimension deux, la question suivante se pose :

Q : A quelle condition un champ de vecteurs est-il un champ de gradient ?

Le Théorème de Schwarz impose des conditions nécessaires.

Proposition 1. *Soit $\vec{V} = (V_1, V_2, V_3)$ un champ de vecteurs dérivable, de dérivées continues, défini sur un domaine \mathcal{D} . Une condition nécessaire pour que \vec{V} soit un champ de gradient est que*

$$\frac{\partial V_3}{\partial x_2} = \frac{\partial V_2}{\partial x_3}, \quad \frac{\partial V_1}{\partial x_3} = \frac{\partial V_3}{\partial x_1} \quad \text{et} \quad \frac{\partial V_2}{\partial x_1} = \frac{\partial V_1}{\partial x_2}. \quad (6.1)$$

Nous verrons plus loin que (6.1) est aussi une condition suffisante, si on fait des hypothèses adéquates sur le domaine.

Définition 1. Soit $\vec{V} = (V_1, V_2, V_3)$ un champ de vecteurs dérivable défini sur un domaine \mathcal{D} de \mathbb{R}^3 . On appelle rotationnel de \vec{V} le champ de vecteur noté $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}$ défini sur \mathcal{D} par

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = \left(\frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_3}, \frac{\partial V_1}{\partial x_3} - \frac{\partial V_3}{\partial x_1}, \frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \right).$$

Remarque 1. Pour désigner le rotationnel, on utilise aussi souvent la notation $\vec{\nabla} \wedge \vec{V}$. Si on écrit les vecteurs sous forme colonne, cette notation a un avantage mnémotechnique appréciable, car on peut utiliser la même règle que pour le produit vectoriel

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial V_1}{\partial x_3} - \frac{\partial V_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$

Exemple 13. Champ planaire. Considérons un champ planaire, c'est à dire dans les composantes sont dans le plan $0x_1x_2$, et supposons de plus qu'il est indépendant de la variable x_3 . Il a donc la forme

$$\vec{V}(x_1, x_2, x_3) = (V_1(x_1, x_2), V_2(x_1, x_2), 0). \quad (6.2)$$

On obtient

$$\overrightarrow{\text{rot}} V(x_1, x_2, x_3) = \left(0, 0, \left(\frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \right)(x_1, x_2) \right) = \left(\frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \right) \vec{e}_3.$$

Le rotationnel est donc orthogonal au plan $0x_1x_2$, parallèle au vecteur $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$.

Voyons deux propriétés importantes :

Proposition 2. Soit f une fonction deux fois dérivable de dérivées seconde continues sur \mathcal{D} domaine de \mathbb{R}^3 . On a

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}} f) = 0. \quad (6.3)$$

Si \vec{V} est un champ de vecteurs deux fois dérivable sur \mathcal{D} de dérivées seconde continues, alors on a

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}) = 0 \quad (6.4)$$

et

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{V}) - \Delta V. \quad (6.5)$$

Démonstration. La première identité, et une conséquence immédiate de la Proposition 1, c'est à dire le théorème de Schwarz. Un bref calcul permet de vérifier les deux autres formules.

Remarque 2. la condition (6.4) fournit en particulier une condition nécessaire pour qu'un champ soit un rotationnel : seul les *champs à divergence nulle* peuvent être des rotationnels. Par exemple si

$$\vec{V}(M) = (x_1, x_2, x_3)$$

alors $\text{div} \vec{V} = 3$ et \vec{V} n'est donc pas un rotationnel.

Voyons maintenant d'autres propriétés élémentaires :

Proposition 3. Soit f une fonction et V un champ de vecteurs dérivable de dérivée continue sur \mathcal{D} domaine de \mathbb{R}^3 . On a

$$\overrightarrow{\text{rot}}(f \vec{V}) = f \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} + \overrightarrow{\text{grad}} f \wedge \vec{V}.$$

6.1.1 Invariance du rotationnel par changement de repère orthonormé

Comme pour le gradient et la divergence, la forme du rotationnel est la même pour tous les repères orthonormés. Soit $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ une nouvelle base orthonormée, et des coordonnées x'_1, x'_2, x'_3 correspondantes de sorte que $x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 = x'_1 \vec{e}'_1 + x'_2 \vec{e}'_2 + x'_3 \vec{e}'_3$. Soit \vec{V} un champs de vecteur donné sur \mathcal{D} . Ce champ s'exprimera dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ comme

$$\vec{V}(M) = V_1(x_1, x_2, x_3) \vec{e}_1 + V_2(x_1, x_2, x_3) \vec{e}_2 + V_3(x_1, x_2, x_3) \vec{e}_3$$

pour M de coordonnées (x_1, x_2, x_3) dans $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Son expression dans la nouvelle base sera alors

$$\vec{V}(M) = V'_1(x'_1, x'_2, x'_3) \vec{e}'_1 + V'_2(x'_1, x'_2, x'_3) \vec{e}'_2 + V'_3(x'_1, x'_2, x'_3) \vec{e}'_3,$$

pour M de coordonnées (x'_1, x'_2, x'_3) dans $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$. En posant $\vec{X} = (x_1, x_2, x_3)$ et $\vec{X}' = (x'_1, x'_2, x'_3)$ on a

$${}^t \vec{X} = A^t X',$$

où A désigne la matrice de passage de la nouvelle base vers l'ancienne. De même, il vient

$$\vec{V}'(x'_1, x'_2, x'_3) = \begin{pmatrix} V'_1(x'_1, x'_2, x'_3) \\ V'_2(x'_1, x'_2, x'_3) \\ V'_3(x'_1, x'_2, x'_3) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} V_1(x_1, x_2, x_3) \\ V_2(x_1, x_2, x_3) \\ V_3(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix} = A \vec{V}(x_1, x_2, x_3). \quad (6.6)$$

Quelle est l'expression du champ rotationnel dans la nouvelle base ?

Proposition 4. . Soit $M \in \mathcal{D}$. Alors on a

$$\overrightarrow{\text{rot}} V(M) = \frac{\partial V'_3}{\partial x'_2} - \frac{\partial V'_2}{\partial x'_3} \vec{e}'_1 + \frac{\partial V'_1}{\partial x'_3} - \frac{\partial V'_3}{\partial x'_1} \vec{e}'_2 \frac{\partial V'_2}{\partial x'_1} - \frac{\partial V'_1}{\partial x'_2} \vec{e}'_3$$

La forme du rotationnel ne dépend donc pas de la base orthonormée choisie.

6.2 Flux du rotationnel

6.2.1 Surfaces fermées

Nous avons vu dans la section précédente que le rotationnel est un champ à divergence ce nulle

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}) = 0.$$

Il résulte alors

Proposition 5. Soit \mathcal{S} une surface fermée de \mathbb{R}^3 , c'est à dire bordant un domaine \mathcal{D} de \mathbb{R}^3 . Alors pour tout champ de vecteur \vec{V} défini sur \mathcal{D} on a

$$\text{Flux}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}, \mathcal{S}) = 0.$$

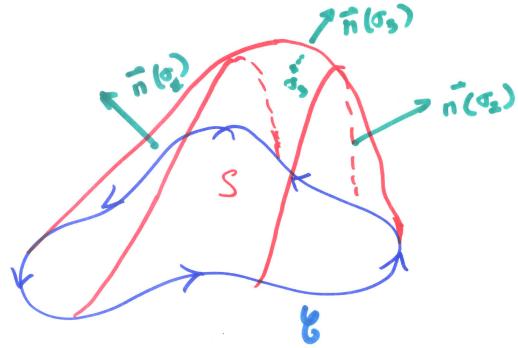
Preuve. Ceci est une conséquence directe de la formule flux-divergence vu dans le champ précédent : si \mathcal{S} est une surface fermée de \mathbb{R}^3 limitant un domaine \mathcal{D} , alors on a pour tout champ de vecteurs \vec{V} dérivable

$$\text{Flux}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}, \mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}(\sigma) \cdot \vec{n}(\sigma) d\sigma = \iiint_{\mathcal{D}} \text{div}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V})(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = 0.$$

□

6.2.2 Surfaces dont le bord est une courbe

Considérons maintenant une courbe fermée \mathcal{C} dans \mathbb{R}^3 et \mathcal{S} une surface de \mathbb{R}^3 dont le bord est \mathcal{C} . Si on s'est donné une orientation sur \mathcal{C} , on choisit alors le sens correspondant pour le vecteur unitaire normal $\vec{n}(\sigma)$ à la surface au point σ de cette surface, en s'assurant que l'orientation de la courbe soit celle du sens trigonométrique, lorsque l'on regarde dans la direction donnée par \vec{n} .



Il résulte de la Proposition 5 que la quantité

$$\text{Flux}(\vec{\text{rot}} \vec{V}, \mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{S}} \vec{\text{rot}} \vec{V}(\sigma) \cdot \vec{n}(\sigma) d\sigma$$

ne dépend pas de la surface \mathcal{S} mais uniquement du contour \mathcal{C} . Considérons en effet une autre surface \mathcal{S}_0 de bord \mathcal{C} , et soit \mathcal{D}_0 le domaine dont le bord est $\mathcal{S} \cup \mathcal{S}_0$. En effet, on a par (5)

$$\text{Flux}(\vec{\text{rot}} \vec{V}, \mathcal{S} \cup \mathcal{S}_0) = \iiint_{\mathcal{D}_0} \text{div}(\vec{\text{rot}} \vec{V})(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = 0.$$

Or

$$\text{Flux}(\vec{\text{rot}} \vec{V}, \mathcal{S} \cup \mathcal{S}_0) = \text{Flux}(\vec{\text{rot}} \vec{V}, \mathcal{S}) - \text{Flux}(\vec{\text{rot}} \vec{V}, \mathcal{S}_0),$$

le signe moins dans le terme de droite provenant du fait que les vecteurs normaux sont orientés différemment. Il en résulte que

$$\text{Flux}(\vec{\text{rot}} \vec{V}, \mathcal{S}) = \text{Flux}(\vec{\text{rot}} \vec{V}, \mathcal{S}_0).$$

la valeur du Flux est donc, la même pour toute surface dont le contour est \mathcal{C} : il s'agit donc d'une fonction de \mathcal{C} uniquement.

Théorème 1. *On a l'identité*

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{\text{rot}} \vec{V} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_{\mathcal{C}} \vec{V}(M) d\vec{M}.$$

Quelques indications sur la démonstration. Commençons par considérer le cas planaire, c'est à dire le cas où la courbe est incluse dans un plan.

Le cas planaire. Il correspond au cas où la courbe est incluse dans un plan P de l'espace, ainsi que la surface \mathcal{S} . Quitte à changer de repère orthonormé, on peut supposer que ce plan P contient l'origine, et qu'il est engendré par les vecteurs (\vec{e}_1, \vec{e}_2) d'un repère orthonormé $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Comme

\mathcal{S} est inclus dans P , P est le plan tangent à \mathcal{S} en tout point de \mathcal{S} , et en orientant la courbe dans le sens trigonométrique on a donc

$$\vec{n}(\sigma) = \vec{e}_3, \text{ pour tout point } \sigma \in \mathcal{S}.$$

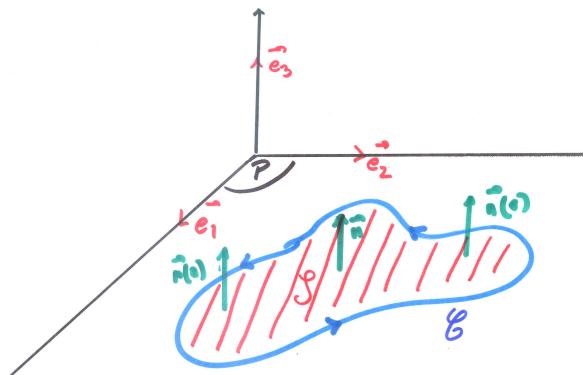
Il en résulte, comme l'expression du rotationnel est la même dans tous les repères que

$$\operatorname{rot} \vec{V}(\sigma) \cdot \vec{n}(\sigma) = \left(\frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \right)(\sigma),$$

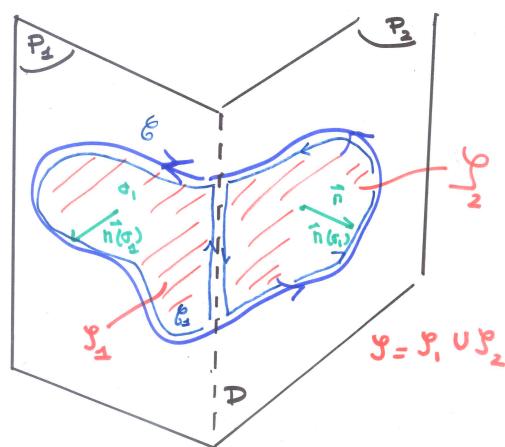
et que

$$\text{Flux}(\operatorname{rot} V, \mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{S}} \left(\frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \right)(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{\mathcal{C}} \vec{V}(M) d\vec{M},$$

où la dernière identité provient du théorème de Green-Riemann vu au chapitre 4. Ceci démontre donc la propriété dans le cas planaire.



Le cas où \mathcal{S} est incluse dans la réunion de deux plans. Traitons maintenant un autre cas particulier, celui où \mathcal{S} est incluse dans la réunion de deux plans P_1 et P_2 , dont l'intersection est une droite D , comme sur le dessin ci-dessous



Soit \mathcal{S} est une surface de $P_1 \cup P_2$. On a $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ où $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S} \cap P_1$ et $\mathcal{S}_2 = \mathcal{S} \cap P_2$ de sorte que

$$\text{Flux}(\operatorname{rot} V, \mathcal{S}) = \text{Flux}(\operatorname{rot} V, \mathcal{S}_1) + \text{Flux}(\operatorname{rot} V, \mathcal{S}_2) \quad (6.7)$$

Soit \mathcal{C}_1 la courbe bordant \mathcal{S}_1 et soit \mathcal{C}_2 la courbe bordant \mathcal{S}_2 . Chacune des deux surfaces étant planaire, on a par le résultat de la première partie de cette démonstration

$$\text{Flux}(\vec{\text{rot}} V, \mathcal{S}_i) = \int_{\mathcal{C}_i} \vec{V}(M) d\vec{M} \text{ pour } i = 1, 2. \quad (6.8)$$

Enfin on vérifie que

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{V}(M) d\vec{M} = \int_{\mathcal{C}_1} \vec{V}(M) d\vec{M} + \int_{\mathcal{C}_2} \vec{V}(M) d\vec{M}. \quad (6.9)$$

En effet, la réunion des courbes \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 nous donne la courbe \mathcal{C} , à laquelle il faut ajouter une arête commun sur la droite D . Cette dernière est parcouru dans des sens opposés sur chacune des courbes, de sorte que leurs contributions s'annule dans la somme du membre de droite de (6.9). En combinant les relations (6.7), (6.8) et (6.9) on obtient la relation du théorème.

Le cas général. En s'inspirant du deuxième cas, on peut démontrer que le théorème est vrai lorsque la surface est tracée sur une réunion finie de plan. On montre ensuite que toute surface peut être approchée par des surfaces qui ont cette propriété. \square

6.3 Champs à rotationnel nul

Corollaire 1. Soit \vec{V} un champ de vecteurs dérivable de dérivées continues, sur un domaine \mathcal{D} de \mathbb{R}^3 sans trou. Si

$$\vec{\text{rot}} \vec{V} = 0,$$

alors \vec{V} est un champ de gradient, c'est à dire qu'il existe une fonction f définie sur \mathcal{D} telle que

$$\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} f.$$

Démonstration. Soit \mathcal{C} une courbe fermée quelconque de \mathcal{D} . Si le domaine est sans trou, alors on peut toujours trouver une surface paramétrée \mathcal{S} dont \mathcal{C} est le bord. Si de plus $\vec{\text{rot}} \vec{V} = 0$, alors il résulte du Théorème 1 que

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{V}(M) d\vec{M} = 0.$$

Comme ceci est vrai pour toute courbe fermée \mathcal{C} , il en résulte que le champ de vecteurs \vec{V} est conservatif, et donc un champ de gradient. \square

Remarque 3. Comme en dimension 2, les seules solutions de l'équation

$$\overrightarrow{\text{grad}} g = 0$$

sont les fonctions g constantes. Il en résulte que si \tilde{f} et f sont tels que $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} f = \overrightarrow{\text{grad}} \tilde{f}$ alors nécessairement

$$\tilde{f} = f + c,$$

où c est une constante.

Exemple 14. Considérons un champ de vecteur \vec{V} linéaire, c'est à dire de la forme

$$\vec{V}(\vec{V}) = A \cdot \vec{X},$$

où A est une matrice 3×3 .

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}.$$

On a donc $V_1(x_1, x_2) = a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3$, $V_2(x_1, x_2) = a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3$, et $V_3(x_1, x_2) = a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,3}x_3$ de sorte que

$$\begin{cases} \frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_3} = a_{3,2} - a_{2,3} \\ \frac{\partial V_1}{\partial x_3} - \frac{\partial V_3}{\partial x_1} = a_{1,3} - a_{3,1} \\ \frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2} = a_{2,1} - a_{1,2} \end{cases}$$

V est donc un champ de gradient si et seulement si

$$a_{2,1} = a_{1,2}, a_{1,3} = a_{3,1} \text{ et } a_{2,1} = a_{1,2}$$

c'est à dire si et seulement si la matrice A est *symétrique*. Dans ce cas, on vérifie, comme en dimension deux, que l'on a $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} f$, avec

$$f(X) = \frac{1}{2} A \cdot \vec{X} \cdot \vec{X},$$

la forme quadratique associée à la matrice symétrique A .

6.4 Champ à divergence nulle, potentiels vecteurs

Définition 2. On dit d'un champ de vecteurs \vec{V} qu'il est un champ de rotationnel s'il existe un champ de vecteur \vec{A} tel que

$$\vec{V} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}.$$

Le champ de vecteur A est alors dit potentiel vecteur dont dérive le champ \vec{V} .

Dans la remarque 2 nous avons vu qu'une *condition nécessaire* pour être un champ de rotationnel était

$$\text{div } \vec{V} = 0.$$

Si le domaine n'a pas de trou, il s'avère alors que cette condition est également *suffisante*.

Théorème 2. Soit \vec{V} un champ de vecteur dérivable sur un domaine \mathcal{D} sans trou. On suppose que

$$\text{div } \vec{V}(M) = 0, \forall M \in \mathcal{D}.$$

Alors il existe un champ de vecteur \vec{A} défini sur \mathcal{D} tel que

$$\vec{V} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}.$$

Le champ de vecteurs \vec{A} est donc un *potentiel vecteur* dont dérive le camp de vecteurs \vec{V} .

Remarque 4. Si

$$\operatorname{div} V = 0,$$

alors il n'y a pas unicité du potentiel vecteur. En effet, si \vec{A} est un tel potentiel vecteur, c'est à dire si

$$\vec{V} = \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A},$$

alors il en est de même de

$$\vec{A}_f = \vec{A} + \overrightarrow{\operatorname{grad}} f, \quad (6.10)$$

pour toute fonction f , car $\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} f) = 0$. Il résulte du Corollaire 1 que tous les potentiels vecteurs dont dérive \vec{V} ont la forme (6.10).

Exemple 15. Champs planaires. Reprenons les champs planaires introduits dans l'exemple 13, sans supposer ici qu'il sont indépendants de la variable x_3 : ils ont donc la forme

$$\vec{V}(x_1, x_2, x_3) = (V_1(x_1, x_2, x_3), V_2(x_1, x_2, x_3), 0). \quad (6.11)$$

Supposons de plus que $\operatorname{div} \vec{V} = 0$. Ceci signifie, comme la troisième composante est nulle que

$$\frac{\partial V_1}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial V_2}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) = 0$$

En considérons le champs de vecteurs sur \mathbb{R}^3

$$\vec{V}^\perp(x_1, x_2) = (V_2(x_1, x_2, x_3), -V_1(x_1, x_2, x_3), 0)$$

on obtient

$$\frac{\partial V_2^\perp}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) - \frac{\partial V_1^\perp}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) = 0$$

Si l'on fixe la troisième variable x_3 et deux l'on ne considère que les deux premières composantes de \vec{V}^\perp , aloes on obtient un champ de vecteur sur le plan $x_3 = C^{te}$: On peut donc appliquer les résultats du Chapitre 4 sur les champs de vecteurs à deux variables, qui montrent \vec{V}^\perp est un champ de gradient par rapport aux deux premières variables, c'est à dire qu'il il existe donc une fonction $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\vec{V}^\perp = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, 0 \right),$$

soit

$$\vec{V}(x_1, x_2, x_3) = \left(-\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2), \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2), 0 \right).$$

Posons

$$\vec{A}(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, -f(x_1, x_2)).$$

On vérifie alors que l'on a bien

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A} = \vec{V}.$$

Exercices

Exercice I

Soit \vec{A} un vecteur de \mathbb{R}^3 . déterminer la divergence et le rotationnel du champ de vecteur

$$\vec{V}(\vec{X}) = \vec{A} \wedge \vec{X}.$$

Exercice II

Soient \vec{A} et \vec{B} deux vecteurs de \mathbb{R}^3 . On définit sur \mathbb{R}^3 le champ de vecteur

$$\vec{V}(\vec{X}) = (\vec{A} \cdot \vec{X}) \vec{B}.$$

Exprimer la divergence et le rotationnel de \vec{V} .

Chapitre 7

Sujets d'examen

Examen du 5 Juin 2012

Durée : 2 heures.

Les notes de cours et les calculatrices ne sont pas autorisées. Le sujet comprend quatre exercices, qui sont indépendants.

Exercice III

On considère la fonction de deux variables $F(x, y) = x^4 + 3y^2 - 4x^2y$, et on note \mathcal{C} l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, F(x, y) = 0\}$.

- 1) Calculer $\overrightarrow{\text{grad}} F$. Quels sont les points de \mathbb{R}^2 où $\overrightarrow{\text{grad}} F$ s'annule ?
- 2) Montrer que $A = (1, 1) \in \mathcal{C}$. Calculer le gradient de F en ce point. Montrer que près de F , \mathcal{C} est de la forme $y = \varphi(x)$, c'est à dire le graphe d'une fonction φ .
- 3) Donner un vecteur tangent en \mathcal{C} en A , puis un vecteur unitaire tangent.
- 4) Donner l'équation de la droite affine tangente à \mathcal{C} en A .
- 5) Calculer $\varphi'(1)$.

Exercice IV

On considère la courbe paramétrée \mathcal{C} de l'espace \mathbb{R}^3 donnée par le paramétrage suivant :

$$x(t) = \cos t, \quad y(t) = \sin t, \quad z(t) = t, \text{ où } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

- 1) Calculer un vecteur tangent à \mathcal{C} au point $M(t) = (x(t), y(t), z(t))$, puis un vecteur unitaire tangent.
- 2) soit V_1 le champ de vecteurs défini par $\vec{V}_1(x, y, z) = (x + z, y^2, x)$. Calculer $\int_{\mathcal{C}} \vec{V}_1(M) d\vec{M}$.
- 3) Soit V_2 le champ de vecteur défini par $\vec{V}_2(x, y, z) = (y^2 \cos x, 2y \sin x + e^z, ye^z)$. Montrer qu'il existe une fonction f telle que $\vec{V}_2 = \overrightarrow{\text{grad}} f$.
- 4) Calculer f .
- 5) Calculer $\int_{\mathcal{C}} \vec{V}_2(M) d\vec{M}$.

Exercice V

1) Soit $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 1 \leq y \leq 10, y \leq x \leq y^2\}$. Calculer en utilisant le théorème de Fubini les intégrales doubles $I_1 = \iint_{\mathcal{D}} \frac{1}{x^2 y} dx dy$ et $I_2 = \iint_{\mathcal{D}} \frac{y}{(x+y)^2} dx dy$.

2) Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 1\}$ le disque unité de \mathbb{R}^2 . Calculer en utilisant un changement de variables approprié

$$I_3 = \iint_D \frac{x^2}{1+x^2+y^2} dx dy.$$

3) Soit $\mathcal{V}_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 < 1, 0 < z < 1\}$. Calculer en utilisant des coordonnées cylindriques l'intégrale $I_4 = \iiint_{\mathcal{V}_1} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$.

4) Soit $\mathcal{V}_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 < 1, 0 < z < x^2 + y^2 + 1\}$. Calculer le volume de \mathcal{V}_2 .

5) Soit $B_+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 < 1, 0 \leq z < 1\}$. Calculer, en utilisant des coordonnées sphériques l'intégrale $I_5 = \iiint_{B_+} z dx dy dz$.

Exercice VI

1) Soit $\mathcal{S}_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$. Vérifier que \mathcal{S} est une portion du graphe d'une fonction que l'on précisera. Calculer $I_1 = \iint_{\mathcal{S}_1} x^2 d\sigma$.

2) Soit $\mathcal{S}_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = y^2 + 2z^2, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$. L'ensemble \mathcal{S} est-il un graphe ?

3) Calculer

$$I_2 = \iint_{\mathcal{S}_2} yz d\sigma.$$

Corrigé de l'examen du 5 Juin 2012

Exercice I

1) on a $\overrightarrow{\text{grad}} F = (4x^3 - 8xy, 6y - 4x^2)$. Pour avoir $\overrightarrow{\text{grad}} F = (0, 0)$, il faut donc $4x^3 = 8xy$ et $6y = 4x^2$. Si $x \neq 0$, alors la première équation donne $y = \frac{1}{2}x^2$ ce qui est incompatible avec la seconde. La seule solution est donc $(x, y) = (0, 0)$.

2) On vérifie que $F(1, 1) = 0$ et on calcule $\overrightarrow{\text{grad}} F(1, 1) = (-4, 2)$. Comme $F'_y(a) = 2 \neq 0$, la conclusion découle du théorème des fonctions implicites.

3) Un vecteur tangent est donné par $\overrightarrow{\text{grad}}^\perp F(A) = (-2, -4)$, et un vecteur unitaire tangent par $\frac{\overrightarrow{\text{grad}}^\perp F(A)}{\|\overrightarrow{\text{grad}}^\perp F(A)\|}$ c'est à dire $(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}})$.

4) L'équation est donnée par $-4(x - 1) + 2(y - 1) = 0$, ou encore $-4x + 2y = -2$.

5) On a $\varphi'(1) = 2$.

Exercice II

1) Un vecteur tangent à la courbe \mathcal{C} est donné par $M'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$, c'est à dire $M'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$. Comme $\|M'(t)\|^2 = (\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1 = 2$, un vecteur unitaire tangent est donc donné par $\frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin t, \cos t, 1)$.

2) on a

$$\begin{aligned} I &\equiv \int_{\mathcal{C}} \vec{V}(M) d\vec{M} = \int_0^{2\pi} [(x(t) + z(t)) x'(t) + y^2(t) y'(t) + x(t) z'(t)] dt \\ &= \int_0^{2\pi} [(\cos t + t)(-\sin t) + (\sin^2 t)(\cos t) + \cos t] dt \\ &= \int_0^{2\pi} [-\cos t \sin t - t \sin t + (1 - \cos^2 t)(\cos t) + \cos t] dt \\ &= - \int_0^{2\pi} t \sin t dt = [t \cos t]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \cos t dt = 2\pi \end{aligned}$$

les autres parties de l'intégrale dans la troisième ligne étant nulles pour des raisons de périodicité, parité (en se ramenant à la période $[-\pi, \pi]$, etc...) et où la dernière intégrale est calculée par intégration par parties.

3) On calcule $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}_2 = (e^z - 2e^z, 0 - 0, 2y \cos x - 2y \cos x) = (0, 0, 0)$ et la conclusion en découle par un résultat du cours (Corollaire 1, Chapitre 6).

4) On doit avoir $f'_x = y^2 \cos x$ de sorte que par intégration $f(x, y, z) = y^2 \sin x + g(y, z)$. De la relation $f'_y = 2y \sin x + e^z$ on déduit alors que $g'_y = 2y \sin x + e^z - 2y \sin x = e^z$, d'où $g(y, z) = ye^z + h(z)$. Enfin, la relation $f'_z = ye^z$ donne $h'(z) = ye^z - ye^z = 0$ d'où $h = c$, constante arbitraire. On a donc $f(x, y, z) = y^2 \sin x + ye^z + c$.

5) Comme \vec{V}_2 est un champ de gradient, on obtient pour résultat $f(M(2\pi)) - f(M(0)) = f(1, 0, 2\pi) - f(1, 0, 0) = 0$.

Exercice III

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_1^{10} \left(\int_y^{y^2} \frac{1}{x^2 y} dx \right) dy = \int_0^{10} \frac{1}{y} \left[\frac{1}{y} - \frac{1}{y^2} \right] dy = \left[\frac{1}{2} y^{-2} - y^{-1} \right]_1^{10} = \frac{81}{200} = 0,405. \\
I_2 &= \int_1^{10} \left(\int_y^{y^2} \frac{y}{(x+y)^2} dx \right) dy = \int_1^{10} y \left[\frac{1}{y+y} - \frac{1}{y+y^2} \right] dy = \int_1^{10} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{1+y} \right] dy \\
&= \left[\frac{1}{2} y - \log(1+y) \right]_1^{10} = \frac{9}{2} - \log \frac{11}{2}. \\
I_3 &= \iint_{[0,1] \times [0,2\pi]} \frac{r^2 \cos^2 \theta}{1+r^2} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \frac{r^3}{1+r^2} dr \right) \cos^2 \theta d\theta = \left(\int_0^1 \frac{r^3}{1+r^2} dr \right) \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \right) \\
&= \left[\frac{1}{2} (r^2 - \log(1+r^2)) \right]_0^1 \left[\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta) d\theta \right] = \frac{\pi}{2} [1 - \log 2]. \\
I_4 &= \iiint_{[0,1] \times [0,2\pi] \times [0,1]} (r^2 + z^2) r dr d\theta dz = 2\pi \int_0^1 \left(\int_0^1 r(r^2 + z^2) dr \right) dz = 2\pi \int_0^1 \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2} z^2 \right] dz = \frac{5\pi}{6}. \\
\text{Vol}(\mathcal{V}_2) &= \iint_{\mathcal{V}_2} dx dy dz = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(\int_0^{r^2+1} r dz \right) dr \right) d\theta = 2\pi \int_0^1 \left(\int_0^{r^2+1} dz \right) r dr = 2\pi \int_0^1 (r^3 + r) dr = \frac{3\pi}{2}. \\
I_5 &= \iiint_{[0,1] \times [0,2\pi] \times [0,\frac{\pi}{2}]} (r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi = 2\pi \left(\int_0^1 r^3 dr \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \right) \\
&= \frac{\pi}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi d\varphi = \frac{\pi}{4} \left[-\frac{\cos 2\varphi}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Exercice IV

1) \mathcal{S}_1 et le graphe de la fonction $f(x, y) = 4 - x - y$. on a donc $\sqrt{1+f'_x{}^2+f'_y{}^2} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$. Considérons $\mathcal{D} = \{(x, y), x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 4\}$ (intérieur d'un triangle). Alors \mathcal{S}_1 est le graphe de f au dessus de \mathcal{D} , et en utilisant le Théorème de Fubini

$$I_1 = \sqrt{3} \iint_{\mathcal{D}} x^2 dx dy = \sqrt{3} \int_0^4 \left(\int_0^{4-y} x^2 dx \right) dy = \sqrt{3} \int_0^4 \frac{(4-y)^3}{3} dy = \sqrt{3} \cdot \frac{4^4}{12} = \frac{64}{\sqrt{3}}.$$

2) \mathcal{S}_2 est le graphe $g(y, z) = y^2 + 2z^2$. On a $\sqrt{1+g'_y{}^2+g'_z{}^2} = \sqrt{1+4y^2+8z^2}$.

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^1 \left(\int_0^1 y \sqrt{1+4y^2+8z^2} dy \right) zdz = \frac{1}{12} \int_0^1 \left[(1+4y^2+8z^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 zdz \\
&= \frac{1}{12} \int_0^1 [(5+8z^2)^{\frac{3}{2}} - (1+8z^2)^{\frac{3}{2}}] zdz = \frac{1}{480} \left[(5+8z^2)^{\frac{5}{2}} - (1+8z^2)^{\frac{5}{2}} \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{480} [13^{\frac{5}{2}} - 9^{\frac{5}{2}} - 5^{\frac{5}{2}} + 1].
\end{aligned}$$

Examen du 26 Juin 2012

Durée : 2 heures.

Les notes de cours et les calculatrices ne sont pas autorisées. Le sujet comprend trois exercices, qui sont indépendants.

Exercice I

On considère la courbe paramétrée \mathcal{C} de l'espace \mathbb{R}^3 donnée par :

$$x(t) = e^t, \quad y(t) = e^{2t}, \quad z(t) = t, \text{ où } 0 \leq t \leq 1.$$

- 1) Calculer un vecteur tangent à \mathcal{C} au point $M(t) = (x(t), y(t), z(t))$, puis un vecteur unitaire tangent.
- 2) soit V_1 le champ de vecteurs défini par $\vec{V}_1(x, y, z) = (x^2 + y, z^2, y^3)$. Calculer $I_1 = \int_{\mathcal{C}} \vec{V}_1(M) d\vec{M}$.
- 3) Soit \vec{V}_2 le champ de vecteur défini par

$$\vec{V}_2(x, y, z) = (-2xz^2 \sin x^2 + 2x \sin y^2, 2x^2 y \cos y^2 + 3y^2 e^z, 2z \cos x^2 + y^3 e^z).$$

- 3) Calculer $\overrightarrow{\text{rot}} V_2$. Que peut-on en déduire ?
- 4) Trouver une fonction f telle que $\vec{V}_2 = \overrightarrow{\text{grad}} f$.
- 5) Calculer $I_2 = \int_{\mathcal{C}} \vec{V}_2(M) d\vec{M}$.

Exercice II

On considère la fonction de deux variables $F(x, y) = x^4 + y^4 e^{x^2} - 1$, le domaine

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, F(x, y) < 0\}$$

ainsi que son contour \mathcal{C} , c'est à dire l'ensemble $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, F(x, y) = 0\}$.

- 1) Montrer que $0 = (0, 0)$ appartient à \mathcal{D} , et que le point $A = (0, 1)$ appartient à \mathcal{C} .
- 2) Montrer que si $(x, y) \in \mathcal{D}$ (resp. \mathcal{C}), alors les points $(x, -y)$, $(-x, y)$, $(-x, -y)$ appartiennent à \mathcal{D} (resp. \mathcal{C}).
- 3) Montrer que $\mathcal{D} \subset [-1, 1] \times [-1, 1]$.
- 4) Calculer $\overrightarrow{\text{grad}} F$. Quels sont les points où $\overrightarrow{\text{grad}} F$ s'annule ?
- 5) Calculer $\overrightarrow{\text{grad}} F(A)$. Donner un vecteur tangent à \mathcal{C} en A .
- 6) Donner l'équation de la droite affine tangente à \mathcal{C} en A .
- 7) Montrer que $\mathcal{C} \cap \{(x, y), y \geq 0\}$ est le graphe d'une fonction que l'on déterminera. On pose $\mathcal{D}^+ = \mathcal{D} \cap \{(x, y), y \geq 0\}$, et on note \mathcal{C}^+ le contour de \mathcal{D}^+ .
- 8) Calculer $I_1 = \iint_{\mathcal{D}^+} y^3 e^{x^2} (2x^2 - x) dx dy$.
- 9) Soit $\vec{V}(x, y) = (V_1(x, y), V_2(x, y)) = (x^2 y^4 e^{x^2}, y^3 e^{x^2})$. Calculer $g = \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}$.
- 10) Calculer $I_2 = \int_{\mathcal{C}^+} \vec{V}_2(M) d\vec{M}$, où \mathcal{C}^+ est orientée dans le sens trigonométrique.

Exercice III

A) Soit \mathcal{D}_1 le triangle dans \mathbb{R}^2 de sommets $(0,0), (1,0)$ et $(0,1)$. Calculer l'intégrale double $I_1 = \iint_{\mathcal{D}_1} x^2 y^2 dx dy$.

B) Soit \mathcal{V}_1 la partie de \mathbb{R}^3 définie par

$$\mathcal{V}_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 6 - x^2 - y^2 \geq z \geq 4x^2 + 4y^2 + 1\}.$$

Calculer le volume de \mathcal{V}_1 [on pourra utiliser des coordonnées polaires ou cylindriques].

C) Soit $\mathcal{S}_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 3x + 2y + z = 6, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.

C 1) Montrer que \mathcal{S}_1 est une portion de graphe d'une fonction que l'on explicitera.

C 2) Montrer que le point $A_1 = (1, 1, 1)$ appartient à \mathcal{S}_1 . Donner l'équation du plan affine tangent à \mathcal{S}_1 en A_1 .

C 3) Calculer $I_2 = \iint_{\mathcal{S}_1} \cos(x + y + z) d\sigma$.

D) Soit $\mathcal{S}_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.

D 1) Montrer que le point $A_2 = (1, 1, \sqrt{2})$ appartient à \mathcal{S}_2 . Donner l'équation du plan affine tangent à \mathcal{S}_2 en A_2 .

D 2) Quelles sont les coordonnées sphériques du point A_2 ?

D3) En utilisant des coordonnées sphériques, calculer $I_3 = \iint_{\mathcal{S}_2} x^2 y z d\sigma$.

Corrigé de l'examen du 26 Juin 2012

Exercice I

- 1) Un vecteur tangent à la courbe est donné par $\frac{d}{dt}M(t) = (e^t, 2e^{2t}, 1)$. Un vecteur unitaire est donc donné par $\frac{1}{\sqrt{e^{2t} + 4e^{4t} + 1}}(e^t, 2e^{2t}, 1)$.
- 2) On a

$$I = \int_{\mathcal{C}} \vec{V}_1(M) d\vec{M} = \int_0^1 [(e^{2t} + e^{2t})e^t + t^2 2e^{2t} + e^{6t}] dt = \int_0^1 (2e^{3t} + 2t^2 e^{2t} + e^{6t}) dt.$$

On a par intégration par parties

$$\int_0^1 t^2 e^t dt = [t^2 \frac{e^{2t}}{2}]_0^1 - \int_0^1 t e^{2t} = \frac{e^2}{2} - [t \frac{e^{2t}}{2}]_0^1 + \int_0^1 \frac{e^{2t}}{2} = [\frac{e^{2t}}{4}]_0^1 = \frac{e^2}{4} \text{ et donc}$$

$$I = \frac{2}{3}e^3 + \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{6}e^6.$$

3) Comme $\overrightarrow{\text{rot}} V = 0$, \vec{V} est un champ gradient.

4) On a $f_x = -2xz^2 \sin x^2 + 2x \sin y^2$, d'où par intégration $f = z^2 \cos x^2 + x^2 \sin y^2 + g(y, z)$. Comme $f_y = 2x^2 y \cos y^2 + 3y^2 e^z = 2x^2 y \cos y^2 + g_y(y, z)$ on en déduit $g_y(y, z) = 3y^2 e^z$, et en intégrant de nouveau $g(y, z) = y^3 e^z + h(z)$. Enfin $f_z = 2z \cos x^2 + y^3 e^z = 2z \cos x^2 + y^3 e^z + h'(z)$ d'où $h'(z) = 0$. On a donc $f = z^2 \cos x^2 + x^2 \sin y^2 + y^3 e^z + C$.

5) on a $\int_{\mathcal{C}} \vec{V}_1(M) d\vec{M} = f(M(1)) - f(M(0)) = f(e, e^2, 1) - f(1, 1, 0) = (\cos e^2 + e^2 \sin e^4 + e^7 - \sin 1)$.

Exercice II

- 1) On a $F(0, 0) = -1$ et donc $(0, 0) \in \mathcal{D}$. $F(0, 1) = 1 \cdot e^0 - 1 = 0$ et donc $A \in \mathcal{C}$.
- 2) La propriété résulte de la parité de F par rapport à x et par rapport à y .
- 3) $(x, y) \in \mathcal{D}$ ssi $x^4 + y^4 e^{x^2} \leq 1$ et donc $x^4 \leq 1$ et $y^4 \leq e^{-x^2} \leq 1$, d'où la propriété.
- 4) $\overrightarrow{\text{grad}} F = (4x^3 + 2xy^4 e^{x^2}, 4y^3 e^{x^2})$. le gradient s'annule ssi $4y^3 e^{x^2} = 0$ et $x^3 + 2xy^4 e^{x^2} = 0$. la première condition entraîne $y = 0$ et en reportant dans la seconde on obtient $x = 0$. Le seul point où le gradient s'annule est donc $(0, 0)$.
- 5) On a $\overrightarrow{\text{grad}} F(A) = (0, 4)$, de sorte qu'un vecteur tangent est $\overrightarrow{\text{grad}}^\perp F(A) = (-4, 0)$, et un vecteur unitaire tangent est donc $(1, 0) = \vec{e}_1$.
- 6) la droite affine tangente a pour équation $y = 1$.
- 7) Si $(x, y) \in \mathcal{C}$ on a $y^4 = (1 - x^4)e^{-x^2}$. Si de plus $y \geq 0$, alors $y = (1 - x^4)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{x^2}{4}}$, on obtient donc le graphe de $f(x) = (1 - x^4)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{x^2}{4}}$.
- 8) On utilise Fubini :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-1}^1 \left(\int_0^{f(x)} y^3 (2x^2 - x) e^{x^2} dy \right) dx = \int_{-1}^1 \left[\frac{y^4}{4} \right]_0^{f(x)} (2x^2 - x) e^{x^2} dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1}{4} (1 - x^4) (2x^2 - x) dx = \frac{1}{4} \left[\frac{2x^7}{7} + \frac{x^6}{6} + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{7} + \frac{1}{3} = \frac{10}{21}. \end{aligned}$$

9) On trouve $g = 2xy^3e^{x^2} - 4x^2y^3e^{x^2} = -2y^3e^{x^2}(2x^2 - x)$.

10) On trouve $I_2 = 2I_1$ grâce au théorème de Green-Riemann.

Exercice III

A) On a $\mathcal{D}_1 = \{(x, y), x + y \leq 1, x, y \geq 0\}$. Il vient par Fubini $I_1 = \int_0^1 x^2 (\int_0^{1-x} y^2 dy) dx = \int_0^1 [\frac{y^3}{3}]_0^{1-x} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 (1-x)^3 x^2 dx = \frac{1}{3} [-\frac{x^6}{6} + \frac{3x^5}{5} - \frac{3x^4}{4} + \frac{x^3}{3}]_0^1 = \frac{1}{3} (-\frac{1}{6} + \frac{3}{5} - \frac{3}{4} + \frac{1}{3}) = \frac{1}{180}$.

B) Utilisons des coordonnées cylindriques : \vec{V}_1 est donc caractérisé par $6 - r^2 \geq z \geq 4r^2 + 1$, et il faut donc $5 \geq 5r^2$, c'est à dire $0 \leq r \leq 1$. Il vient

$$\text{Vol}(\mathcal{V}_1) = \int_0^{2\pi} (\int_0^{6-r^2} (\int_{4r^2+1}^z dz) r dr) d\theta = 2\pi \int_0^1 (5 - 5r^2) r dr = 10\pi [\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}]_0^1 = \frac{5\pi}{2}.$$

C1) \mathcal{S}_1 est le graphe de la fonction affine $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$ au dessus de $\Omega_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x, y \geq 0, 3x + 2y \leq 6\}$. On a $\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} = \sqrt{1 + 9 + 4} = \sqrt{15}$.

C2) On vérifie que $3+2+1=6$. Comme \mathcal{S}_1 est un portion de plan affine, l'équation du plan tangent est donc $3x + 2y + z = 6$.

C3) On a $I_2 = \iint_{\Omega} \cos(x+y+(6-3x-2y)\sqrt{15}) dx dy = \iint_{\Omega} \cos(6-2x-y)\sqrt{15} dx dy = \sqrt{15} \int_0^3 (\int_0^{\frac{6-3x}{2}} \cos(6-2x-y) dy) dx = \sqrt{15} \int_0^3 [-\sin(6-2x-y)]_0^{\frac{6-3x}{2}} dx = -\sqrt{15} \int_0^3 (\sin(\frac{1}{2}(3-x)) - \sin(6-2x)) dx = -\sqrt{15}[2\cos(\frac{3}{2}-\frac{x}{2}) - \frac{1}{2}\cos(6-2x)]_0^3$

D1) On a $1^2 + 1^2 + (\sqrt{2})^2 = 4$, A appartient donc à \mathcal{S}_2 .

D2) Soient r_A, θ_A, φ_A les coordonnées sphériques de A. On a $r_A = 2$, et $\sqrt{2} = 2 \sin \varphi_A$, d'où $\varphi_A = \frac{\pi}{2}$. Comme $1 = 2 \cos \theta_A \cos \varphi_A$ on obtient $\theta_A = \frac{\pi}{2}$.

D3) On paramètre \mathcal{S}_2 en utilisant les coordonnées sphériques $\vec{M} : [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathcal{S}_2$, $(\theta, \varphi) \mapsto M(\theta, \varphi) = (2 \cos \theta \sin \varphi, 2 \sin \theta \sin \varphi, 2 \cos \varphi)$. On a $\vec{M}_\theta = (-2 \sin \theta \sin \varphi, 2 \cos \theta \sin \varphi, 0)$, $\vec{M}_\varphi = (2 \cos \theta \cos \varphi, 2 \sin \theta \cos \varphi, 2 \sin \varphi)$ et $\|M_\theta \wedge M_\varphi\| = 4 \sin \varphi$. On a donc $I_2 = \iint_{[0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]} (4 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi)(2 \sin \theta \sin \varphi)(2 \cos \varphi)(4 \sin \varphi) d\theta d\varphi = 64 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \varphi \cos \varphi d\varphi = 64[-\frac{\cos^3 \theta}{3}]_0^{\frac{\pi}{2}] [\frac{\sin^5 \varphi}{5}]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{64}{15}$.

Examen du 14 mai 2013

Durée : 2 heures.

Les notes de cours et les calculatrices ne sont pas autorisées. Le sujet comprend quatre exercices, qui sont indépendants.

Exercice I

On considère la fonction F définie sur \mathbb{R}^3 par $F(x, y, z) = x^4 + 2y^2 + 4z^4 - x^2z^2 - 6$ et on considère l'ensemble $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, F(x, y, z) = 0\}$.

- 1) Calculer $\overrightarrow{\text{grad}} F$. Quels sont les points de \mathbb{R}^3 où $\overrightarrow{\text{grad}} F$ s'annule ?
- 2) Montrer que le point $A = (1, 1, 1) \in \mathcal{S}$. Donner l'équation du plan tangent en A , ainsi qu'un vecteur unitaire normal à \mathcal{S} en A .
- 3) Donner deux vecteurs non colinéaires tangents en A à \mathcal{S} .

Exercice II

On considère dans \mathbb{R}^2 la courbe $\mathcal{C}_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, 0 \leq x \leq 1 \right\}$.

- 1) Calculer la longueur de la courbe \mathcal{C}_1 .
- 2) On considère le champ de vecteurs $\vec{V}_1(x, y) = (2y, 2x^2)$. Calculer $I_1 = \int_{\mathcal{C}_1} \vec{V}_1(M) d\vec{M}$.
- 3) Calculer de même $I_2 = \int_{\mathcal{C}_2} \vec{V}_1(M) d\vec{M}$ où \mathcal{C}_2 désigne le segment orienté joignant les points $(0, 1)$ et $(1, \frac{1}{2}(e + e^{-1}))$.
- 4) Le champ de vecteur \vec{V}_1 est-il un champ de gradient ?
- 5) On considère sur $\mathcal{D} =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ le champ de vecteurs

$$\vec{V}_2(x, y) = \left(\frac{3x^4 + 2x^2y^2 - y^4}{x^2y}, \frac{3y^4 + 2x^2y^2 - x^4}{y^2x} \right).$$

Montrer que \vec{V}_2 est un champ de gradient. Trouver une fonction f telle que $\vec{V}_2 = \overrightarrow{\text{grad}} f$.

- 6) Montrer que $\int_{\mathcal{C}_1} \vec{V}_2(M) d\vec{M} = \int_{\mathcal{C}_2} \vec{V}_2(M) d\vec{M}$.

Exercice III

On considère sur \mathbb{R}^2 les ensembles $\mathcal{D} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq r \leq \cos 2\theta, \theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \right\}$ et $\mathcal{C} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, r = \cos 2\theta \right\}$ où (r, θ) désigne des coordonnées polaires sur \mathbb{R}^2 telles que $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$.

- 1) Dessiner l'allure des ensembles \mathcal{D} et \mathcal{C} . Possèdent-ils des symétries ?
- 2) Montrer que \mathcal{C} est une courbe paramétrée, que l'on peut paramétriser en fonction de l'angle θ .
- 3) Vérifier que le point $A = (\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4})$ appartient à \mathcal{C} (on rappelle que $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$). Donner un vecteur tangent à \mathcal{C} en A .
- 4) Calculer l'aire de \mathcal{D} , c'est à dire $\mathcal{A}\text{ire}(\mathcal{D}) = \iint_{\mathcal{D}} dx dy$.
- 5) Calculer les intégrales $I_1 = \iint_{\mathcal{D}} x dx dy$ et $I_2 = \iint_{\mathcal{D}} y dx dy$.

- 6) Calculer $\int_{\mathcal{C}} x dy$, où \mathcal{C} est orientée dans le sens trigonométrique.
- 7) Calculer le volume du domaine $\mathcal{U} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \text{tels que } (\sqrt{x^2 + y^2}, z) \in \mathcal{D}\}$.

Exercice IV

On considère dans \mathbb{R}^3 le domaine $\mathcal{U} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 \geq z^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. 1) Dessiner l'allure du domaine \mathcal{U} . S'agit-il d'un domaine de révolution ?

- 2) Décrire \mathcal{U} en coordonnées sphériques.
- 3) Calculer le volume de \mathcal{U} .
- 4) Calculer l'intégrale $I_1 = \iiint_{\mathcal{U}} (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} dx dy dz$.
- 5) On note \mathcal{S} la surface délimitant \mathcal{U} . Calculer l'aire de \mathcal{S} .

Corrigé de l'examen du 14 Mai 2013

Exercice I

1) On a $\overrightarrow{\text{grad}} F = (4x^3 - 2xz^2, 4y, 16z^3 - 2x^2z)$. Pour que $\overrightarrow{\text{grad}} F = 0$, il faut $4x^3 - 2xz^2 = 0, y = 0, 16z^3 - 2x^2z = 0$, d'où $2x^2 = z^2, y = 0, 8z^2 = x^2$ qui entraîne $y = 0, 2x^2 = z^2 = 16z^2$, soit $y = 0, y = 0, z = 0$. Il n'y a donc que solution évidente $(0, 0, 0)$.

2) On a $\overrightarrow{\text{grad}} F(A) = (2, 4, 14)$, d'où l'équation du plan tangent affine en $A : 2(x - 1) + 4(y - 1) + 14(z - 1) = 0$.

3) Le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}} F(A)$ est orthogonal à \mathcal{S} en A , le vecteur

$$\vec{n} = \frac{\overrightarrow{\text{grad}} F(A)}{\|\overrightarrow{\text{grad}} F(A)\|} = \frac{1}{\sqrt{216}}(2, 4, 14) \text{ est donc unitaire et orthogonal.}$$

4) Les vecteurs $\vec{t}_1 = \overrightarrow{\text{grad}} F(A) \wedge \vec{e}_1$ et $\vec{t}_2 = \overrightarrow{\text{grad}} F(A) \wedge \vec{e}_2$ sont par exemple de tels vecteurs tangents, soit $\vec{t}_1 = (0, 14, -4)$ et $\vec{t}_2 = (0, -14, 2)$.

Exercice II

1) La courbe \mathcal{C}_1 est le graphe de la fonction f donnée par $f_1(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$. Sa longueur est donc donnée par l'intégrale $L = \int_0^2 \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$. On calcule

$$1 + f'(x)^2 = \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x} - 2) + 1 = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2. \text{ On obtient donc } L = \frac{1}{2} \int_0^2 ((e^x + e^{-x}) dx) = \frac{1}{2}[e^x - e^{-x}]_0^1 = \frac{1}{2}(e - e^{-1}).$$

2) Comme la courbe est un graphe, on la paramètre par x , avec $dy(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) dx$. Il vient ainsi, en utilisant des intégrations par parties

$$I_1 = \int_0^1 (e^x + e^{-x}) dx + (x^2)(e^x - e^{-x}) dx = [e^x - e^{-x} + (x^2(e^x + e^{-x}) - 2x(e^x - e^{-x}) + 2(e^x + e^{-x}))]_0^1 = 2e + 4e^{-1} + 4.$$

3) Le segment \mathcal{C}_2 est également un graphe, celui de la fonction affine $f_2(x) = x(\frac{1}{2}(e + e^{-1}) - 1) + 1$. Sur cette courbe $dy = a dx$, où $a = \frac{1}{2}(e + e^{-1} - 1)$ et donc,

$$I_2 = \int_0^1 2(ax + 1) dx + 2x^2 a dx = [a(x^2 + \frac{2x^3}{3}) + 2x]_0^1 = 2 + \frac{5}{3}a. \text{ Les deux quantités ne sont pas égales, on n'a donc pas un champ de gradient.}$$

4) Si on écrit $\vec{V}_2 = (V_2^1, V_2^2)$ alors

$$\frac{\partial V_2^2}{\partial x} = -\frac{3y^2}{x^2} + 2 - 3\frac{x^2}{y^2} = \frac{3y^4 + x^2y^2 + 3x^4}{x^2y^2} \text{ et de même } \frac{\partial V_2^1}{\partial y} = \frac{3y^4 + x^2y^2 + 3x^4}{x^2y^2} \text{ Comme ces deux quantités sont égales, } \vec{V}_2 \text{ est bien un champ de gradient.}$$

5) On doit avoir $\frac{\partial f}{\partial x} = V_2^1$ donc, $f(x, y) = \int (\frac{3x^2}{y} + 2y - \frac{y^3}{x^2}) dx = \frac{x^3}{y} + 2xy + \frac{y^3}{x} + g(y)$. En dérivant

$$\text{par rapport à } y \text{ on trouve } \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x^3}{y^2} + 2x + \frac{3y^2}{x} + g'(y) \text{ d'où}$$

$$g'(y) = V_2^2 + \frac{x^4 - 2x^2y^2 - 3y^4}{xy^2} = 0. \text{ On donc } f(x, y) = \frac{x^3}{y} + 2xy + \frac{y^3}{x} + c = \frac{(x^2 + y^2)^2}{xy} + c.$$

Exercice III

- 1) Le domaine est symétrique par rapport à l'axe Ox .
- 2) un paramétrage de \mathcal{C} est donné par l'application $\vec{M} : [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \rightarrow \mathbb{R}^2, \theta \mapsto \vec{M}(\theta) = (\cos 2\theta \cos \theta, \cos 2\theta \sin \theta)$
- 3) Pour A , on a $r = \frac{1}{4}\sqrt{3+1} = \frac{1}{2} = \cos(\frac{\pi}{3})$. On vérifie ensuite que l'on a bien $A = \vec{M}(\frac{\pi}{6}) = (\cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6}, \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{6})$. Un vecteur tangent au point $\vec{M}(\theta)$ est donnée par $\vec{M}'(\theta) = (-2 \sin 2\theta \cos \theta - \cos 2\theta \sin \theta, -2 \sin 2\theta \sin \theta + \cos 2\theta \cos \theta)$, soit pour $\theta = \frac{\pi}{6}$, $\vec{M}'(\frac{\pi}{6}) = (-2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}), -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}) = (-\frac{7}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4})$.
- 4) Soit $\Omega = \{(r, \theta), 0 \leq r \leq \cos 2\theta, \theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]\}$. Par la formule de changement de variable il vient $\text{aire}(\mathcal{D}) = \int_{\Omega} r \, dr \, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\cos 2\theta} r \, dr \right) d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2\theta)^2 d\theta = \frac{1}{4} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 4\theta) d\theta = \frac{\pi}{8}$.
- 5) Par symétrie $I_2 = 0$. Pour I_1 on écrit $x = r \cos \theta$ d'où il vient $I_1 = \int_{\Omega} r^2 \cos \theta \, dr \, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\cos 2\theta} r^2 \cos \theta \, dr \right) d\theta = \frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2\theta)^3 \cos \theta \, d\theta$. Or on a $16(\cos 2\theta)^3 \cos \theta = (\exp 2i\theta + \exp -2i\theta)^3 (\exp i\theta + \exp -i\theta) = [(\exp 6i\theta + \exp -6i\theta) + 3(\exp 2i\theta + \exp -2i\theta)](\exp \exp -i\theta) = 2(\cos 7\theta + \cos 5\theta + 3 \cos 3\theta + 3 \cos \theta)$. Il en résulte que $I_1 = \frac{1}{24} [\frac{\sin 7\theta}{7} + \frac{\sin 5\theta}{5} + 3 \frac{\sin 3\theta}{3} + 3 \sin \theta]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{24} [-\frac{1}{7} - \frac{1}{5} + 1 + 3] = \frac{128\sqrt{2}}{35 \cdot 24} \cdot 6$ on a par la formule de Green-Riemann $\int_{\mathcal{C}} x \, dy = \text{Aire}(\mathcal{D}) = \frac{\pi}{8}$.
- 7) Le domaine \mathcal{U} est un domaine révolution autour de l'axe Oz , engendré par la rotation de \mathcal{D} . On a donc en raisonnant comme dans le chapitre 5 $\text{Vol}(\mathcal{U}) = 2\pi I_1$.

Exercice IV

- 1) Le domaine \mathcal{U} est de révolution autour de l'axe Oz .
- 2) $\mathcal{U} = \{(x, y, z) \text{ tels que } 0 \leq r \leq 1, \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$.
- 3) On a $\text{Vol}(\mathcal{U}) = \iint_{\mathcal{U}} dx \, dy \, dz = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin \varphi \, d\varphi \right) d\theta \right) r^2 \, dr = 2\pi [\cos(\varphi)]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} [\frac{r^3}{3}]_0^1 = \frac{2\sqrt{2}}{3} \pi$.
- 4) on a $I = \iint_{\mathcal{U}} r^3 \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin \varphi \, d\varphi \right) d\theta \right) r^5 \, dr = 2\pi [\cos(\varphi)]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} [\frac{r^6}{6}]_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{6} \pi$.